UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS - UNISINOS
UNIDADE ACADÊMICA DE GRADUAÇÃO
CURSO DE FÍSICA

RODRIGO FRANCISCO LAZAROTTI

COMPORTAMENTO DAS EMPRESAS NO MERCADO: UM ESTUDO BASEADO EM MODELO DE AGENTES

SÃO LEOPOLDO
2019

RODRIGO FRANCISCO LAZAROTTI

COMPORTAMENTO DAS EMPRESAS NO MERCADO: UM ESTUDO BASEADO EM MODELOS DE AGENTES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade do Vale do Rio dos Sinos-Unisinos, como parte das exigências para a obtenção de título de Licenciatura em Física.

SÃO LEOPOLDO

2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha esposa Maralise Dorneles Barbosa e a minha filha Alice Barbosa Lazarotti pelo auxílio, pelo companheirismo, pela compreensão e paciência demostrada durante o período do projeto.

Agradeço ao Prof. Dr. Alexsandro Marian Carvalho por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa, além de me auxiliar com valiosas contribuições durante todo o processo.

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo, baseado em modelo de agentes, do comportamento de um mercado. Neste sistema, as empresas maximizam seus ganhos através de uma dinâmica em suas estratégias na prática de preços e os consumidores possuem certo nível de informação (racionalidade) enquanto aos preços dos produtos comercializados. Destacamos como principal resultado desta pesquisa, a relação entre a coexistência das estratégias frente a racionalidade dos consumidores e configuração inicial das estratégias dominantes.

Palavras-chaves: Modelo de Agentes, Comportamento das Empresas, Racionalidade do Mercado.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A vida das empresas, em suas diferentes esferas, está repleta de situações em que há interdependência entre as decisões de diferentes organizações no âmbito de certas regras mais ou menos explícitas. Como essas firmas tomam suas decisões, e como elas influenciam as regras no contexto que estão inseridas são questões relevantes para projetar estratégias proativas para garantir o sucesso do negócio no mercado. Uma ferramenta capaz de nos ajudar a entender quais fatores influenciam a maneira como essas situações se desenvolvem é a teoria de jogos.

A teoria dos jogos é uma área que visa estudar as situações de interdependência estratégica. Nesse tipo de situação, cada um dos tomadores de decisão de um grupo está ciente de que a sua decisão depende da decisão dos outros. O nome da teoria dos jogos vem precisamente do fato de que muitas das situações que chamamos de jogos na linguagem comum são situações mais ou menos simples de interdependência estratégica: cada jogador tem que decidir o que fazer, sabendo que essa escolha será "boa" ou "ruim" dependendo do que os outros fazem. Nesta interação entre os jogadores, as chamadas regras do jogo desempenham um papel essencial, que determina as condições em que os jogadores decidem e as consequências de suas decisões.

1.1 TEMA

Estudo do papel das estratégicas de cooperação/conflito entre as empresas no mercado organizacional.

1.2 DELIMITAÇÃO DO TEMA

Modelo estocástico numérico como um instrumento para avaliar o desempenho das empresas em interações do tipo com e sem cooperação num mercado com informação.

1.3 PROBLEMA

Quais são os padrões de comportamento emergentes de um sistema de empresas interagentes frente ao nível de conhecimento dos preços pelos consumidores?

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo Geral

Desenvolver um estudo da performance do mercado organizacional frente a colaboração/competição entre as empresas.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Compreender o comportamento do mercado organizacional.
- Analisar os principais modelos matemáticos do comportamento estratégicos das organizações.
- Investigar o papel das estratégias de prática de preços no desempenho das firmas e do mercado.

1.5 JUSTIFICATIVA

O economista Adam Smith, em sua obra *The Wealth of Nations* (1776), fez uma observação interessante sobre o comportamento das empresas que se revelou verdade em mais de uma ocasião: "os membros da mesma união raramente se encontram, nem até para se divertir, mas quando isso acontece, a conversa sempre termina em uma conspiração contra o povo ou em algum acordo para aumentar os preços ". Embora séculos se tenham passado desde que esta afirmação e as circunstâncias do mercado global mudaram consideravelmente, a verdade é que um comportamento cooperativo entre as empresas responde à lógica do ponto de vista da rentabilidade do negócio. Contudo, da mesma forma que estes acordos podem aumentar os lucros daqueles que fazem parte, são os consumidores que são claramente prejudicados por uma redução da oferta, um aumento injustificado dos preços e uma perda do seu valor excedente.

Um cartel é a expressão formal de um acordo de colusão. Isso implica que as empresas concordam explicitamente sobre o nível de certas variáveis competitivas, por exemplo, como o preço. O objetivo dos membros do cartel é aumentar os benefícios conjuntos, ao custo de reduzir ou eliminar a concorrência. Desta forma, pretende-se agir como um monopólio, aumentando os preços, reduzindo a quantidade e aumentando os lucros obtidos pelas vendas. Os cartéis têm efeitos perniciosos na economia. Eles reduzem a concorrência afetando negativamente os consumidores através de preços mais altos, menor quantidade, variedade e qualidade. Além disso, a longo prazo, reduzem a inovação e o desenvolvimento econômico geral.

A guerra de preços é um termo usado nos negócios para definir um estado de intensa competitividade acompanhado de uma série de reduções multilaterais de preços. Um concorrente abaixará seu preço e outros o abaixarão. Se um dos que reagiu reduzir seu preço abaixo do primeiro, então inicia uma nova rodada de quedas, as empresas competem pelos preços para ganhar participação de mercado, as grandes empresas ficam sem lucros para afundar a empresa rival. No curto prazo, as guerras de preços são boas para os consumidores que podem se beneficiar de preços baixos. Geralmente, eles não são bons para as empresas envolvidas. Se os preços menores cortam as margens, eles podem ameaçar a sobrevivência da empresa. No longo prazo, elas podem ser boas para as empresas dominantes no setor. Normalmente, os menores não poderão competir e devem fechar. Aqueles que permanecem absorverão a quota de mercado daqueles que foram embora. Os principais perdedores, então são as empresas marginais e aqueles que investiram nelas. Posteriormente, o consumidor também pode perder. Com menos empresas no mercado, os preços tendem a aumentar, às vezes a níveis mais altos do que antes da competição.

Num mercado organizacional realistas as empresas tendem a assumir as estratégias que maximizam seus lucros. Dada o caráter dinâmico deste mercado, é de se presumir que seus mecanismos de otimização de desempenho sofram influência direta do tempo. Assim, é de se esperar que a estratégia utilizada num certo período seja substituída, num outro instante, por outra mais eficaz. Esta complexa interação dinâmica entre as empresas não só rege a performance individual de cada uma delas como também dita o próprio mercado.

Dentro da perspectiva dos parágrafos anteriores, neste trabalho desenvolve-se um estudo de um hipotético mercado composto por empresas que dispõem de estratégias com e sem cooperação. De interesse com esta análise, explorar as atividades das estruturas de cooperação/conflito que emergem das interações entre as empresas.

1.6 METODOLOGIA

Estuda-se o problema descrito usando de modelos de agentes em interação (AXEROLD,1997). Nesta modelagem, um sistema é modelado como uma coleção de entidades autônomas de tomada de decisão chamadas agentes. Cada agente avalia individualmente sua situação e toma decisões com base em um conjunto de regras. Os agentes podem executar vários comportamentos apropriados para o sistema que representam - por exemplo, produzindo, consumindo ou vendendo. Interações competitivas repetitivas entre agentes são uma característica deste modelo, que se baseia no poder de técnicas avançadas de processos estocásticos para explorar dinâmicas fora do alcance de métodos matemáticos tradicionais. No nível mais simples, um modelo baseado em agente consiste em um sistema de agentes e as relações entre eles. Os agentes são capazes de evoluir baseado em estratégias de aprendizado (BROWNLEE, 2017) num ambiente em que as interações são dadas por estrututras complexas dinâmicas (BARRAT, LEMY, VESPIGNANI, 2012).

Para tanto desenvolveremos o modelo utilizando de uma metodologia oriunda dos estudos avançados de Física Estatística, em especial, o uso do método de Monte Carlo (BRANDIMARTE). A simulação de Monte Carlo é um procedimento numérico que gera variáveis aleatórias para modelar o risco ou a incerteza de um determinado sistema. As variáveis ou entradas aleatórias são modeladas com base em distribuições de probabilidade. Diferentes iterações ou simulações são executadas para gerar realizações e o resultado é obtido usando avaliando o problema num panorama estatístico. É umas das ferramentas numéricas mais utilizada quando um modelo tem parâmetros incertos ou um sistema complexo dinâmico precisa ser analisado.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 TEORIA DE JOGOS

2.1.1 Breve Digressão Histórica

O começo dos estudos sobre a Teoria do Jogos nos retomam ao início do séc. XVIII com o matemático Francês Antoine Augustin Cournot(1801-1877) (FIGURA 1.a). No seu livro intitulado *“Recherches sur les Principes Mathématique”* ele propõe o modelo do duopólio. Nesse modelo, Cournot, propõe que duas empresas A e B, que produzam um mesmo produto e precisam chegar a um nível de produção, de forma que a produção da empresa A não interfira no lucro da empresa B e que da mesma forma a produção da empresa B não interfira no lucro da empresa A. Assim, Cournot propõe uma solução em que ambas as empresas tenham uma produção que seja a mais adequada para a obtenção de lucros. Para muitos estudiosos (Gene Fowler, Ronaldo Fiani) da Teoria dos Jogos essa é considerada a primeira análise de equilíbrios estratégicos.

Outro matemático que estabeleceu os primeiros princípios de estudo da Teoria dos Jogos é o alemão Ernst Friedrich Zermelo (1871-1953) (FIGURA 1.b). Zermello fez uma análise sobre as estratégias envolvidas no Jogo de Xadrez. Na sua teoria, Zermello propõe que um jogador de xadrez terá sempre chance de vitória para cada jogada, independentemente da situação do seu oponente. A relevância dessa Teoria pode ser observada no seguinte trecho do livro Teoria dos Jogos do professor Ronaldo Fiani: “[...A importância dessa solução residia, na verdade, no método empregado por Zermello, que antecipava a técnica de solução que ficaria conhecida como solução reversa...]” (FIANI, 2015, p.35).

Em 1930 através do matemático austro-americano John von Neumann (FIGURA 1.c) a Teoria do Jogos ganha uma maior dimensão de estudo e compreensão dos seus efeitos. Neumann juntamente com o economista Oskar Morgenstern (FIGURA 1.d) escrevem o livro *“The Theory of Games and Econimic Behavior*” neste livro é apresentado a teoria sobre jogos de soma zero. Os jogos de soma zero são situações onde necessariamente o ganho de um jogador coincide com a perda ou derrota do outro jogador. Outro fator de destaque no livro são as diversas fases de desenvolvimento do jogo, onde os autores avaliam as fusões e cooperações entre os jogadores. Neste sentido, Neumann é um dos grandes difusores e precursores das teses da teoria dos Jogos, entretanto sua teoria focava somente em jogos de soma zero o que restringia seu campo de atuação (FIANI,2009).

Na década 50, Jhon F. Nash Jr. (FIGURA 1.e), Jhon C. Harsanyi (FIGURA 1.f) e Reinhard Selten (FIGURA 1.g), desenvolveram pesquisas que avançariam sobre outros problemas que não só os de soma Zero. Assim, puderam criar uma gama maior de interação entre competidores, tal feito resultou aos três pesquisadores um prêmio Nobel em Economia. No início da década de 50 através de um artigo científico Nash define os equilíbrios para jogos cuja soma não seja necessariamente zero. Mais tarde esse equilíbrio receberia o nome de equilíbrio de Nash. O equilíbrio de Nash pode ser compreendido como a melhor tática que um jogador pode adotar frente as táticas adotas pelos seus oponentes. Nesse caso, nem sempre o ganho de um jogador resultará na perda de outro. Harsanyi por sua vez desenvolve trabalhos ligados a informação incompleta, onde um jogador por ter informações privilegiadas para obter compensações melhores. Já Selten aprofunda o conceito de equilíbrio Nash para subjogos, nesse caso, o autor compreende que nessas situações o equilíbrio deve ser perfeito levando-se em conta todas as ameaças possíveis para a obtenção de um melhor resultado.

Mais recentemente temos os pesquisadores Robert Aumann e Thomas Schelling sendo agraciados com o prêmio Nobel de Economia. Ambos desenvolveram pesquisas aprimorando o equilíbrio de Nash e levando a sua aplicação a novas estratégias.

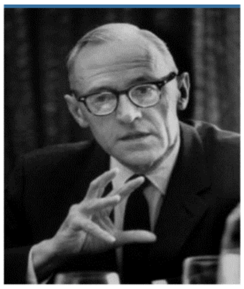
O brasil também tem lugar privilegiado no quesito de pesquisadores relevantes na área da Teoria do Jogos e esse destaque se dá através da Prof. Dr. Marilda Sotomayor (FIGURA 1.h). A pesquisadora Sotomayor desenvolve atividades de pesquisa na área da teoria dos jogos mais precisamente sobre mercados de *matching* desde a década de 70, tendo inclusive escrito um livro com Alvin Roth que também recebeu um prêmio Nobel com Lylod Stowell Shapley por pesquisas ligadas a Teoria do Jogos e mercados operacionais.

Figura 1: Pesquisadores da Teoria dos Jogos

(a) Antoine Augustin Cournot

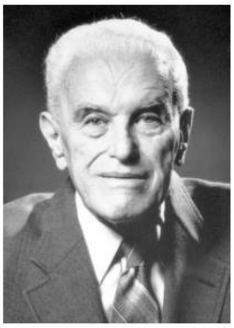
(b) Ernst Friedrich Zermelo

(c) John von Neumann



(d) Oskar Morgenstern

(e) Jhon F. Nash Jr.



(f) Jhon C. Harsanyi

(g) Reinhard Selten

(h) Marilda Sotomayor

2.1.2 Elementos de um Jogo

Numa certa situação de mercado podemos ter uma ou mais empresas buscando ter o maior lucro possível, ou querendo ser a líder do mercado, ou ainda querendo lançar um produto dominante. Nesse caso, cada empresa que se estabelece na disputa pode ser encarada como um dos jogadores buscando o melhor aos seus interesses. Assim, conforme nos informa FIANI (2015): “Um Jogador é qualquer indivíduo ou organização envolvida no processo de interação estratégica que tenha autonomia para tomar decisões.” (FIANI, 2015, p.43). Uma vez que, as empresas (jogadores) consigam verificar qual a sua intenção: novo mercado, novo produto, novas franquias, venda de ações, etc,.

Podemos analisar a situação de desenvolvimento dos jogadores perante o jogo como uma ação ou movimento. Novamente, FIANI (2015) nos apresenta uma definição sobre esses conceitos: “Uma ação ou movimento de um jogador é uma escolha que ele pode fazer em um dado momento do jogo” (FIANI,2015, p.44).

Figura 2: Jogadores em competição


.

Fonte: https://destinonegocio.com/br/negocios-online/aprenda-como-identificar-e-lidar-com-os-concorrentes/

A partir da definição do Jogador sobre o que pretende realizar, ou qual campo pretende atuar para as suas novas investidas (ações ou movimentos) abre-se a ele um conjunto ações. Esse conjunto terá como elementos as possibilidades que o jogador poderá buscar frente ao seu objetivo. Com isso, podemos generalizar a situação da seguinte forma: Numa situação em que cada Jogador é identificado temos um subíndice i, onde $i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$. onde as ações do i-ésimo jogador estão disponíveis para ele. Podemos representa-la, assim: $A_i = \{a_i\}$. Um exemplo para tal analise pode ser a das Confeitaria A e B, que teriam duas possibilidades de ação “Investir em uma nova franquia”, ou “Ampliar a sua loja atual”, ou seja,

A_A= {Investir em uma nova franquia, ampliar a sua loja atual},
A_B= {Investir em uma nova franquia, ampliar a sua loja atual}.

Ao conhecer todas as possibilidades de um jogo, o Jogador poderá tomar a melhor estratégia possível. Uma vez que, terá a seu dispor todas as possíveis ações que possa tomar para alcançar o seu melhor resultado, bem como todos os movimentos possíveis que seus adversários possam tomar. Assim, todas as estratégias são conhecidas e podem ser melhor avaliadas para a tomada das decisões (FIGURA 2).

2.1.3 Representação dos Jogos

2.1.3.1 Forma Estratégica ou Normal

A forma estratégica (ou normal) é o formato mais simples de representar um jogo simultâneo, onde os jogadores tomam decisões e realizam estratégias ao mesmo tempo. Além disso, obtém recompensas, ou *payoffs*, para cada uma das suas escolhas. Essa recompensa de cada jogador pode ser representada como uma Função Recompensa que nada mais é do que um valor numérico que representa o resultado de um jogador frente a uma decisão. Formalmente, tal Função Recompensa pode ser definida da seguinte forma:

> [... seja um resultado qualquer do processo de interação estratégica, ao qual chamamos genericamente de x, e qualquer outro resultado do processo de interação estratégica, y. Uma função de recompensa para esse jogador será uma função f tal que:
>
> f(x)≥f(y) sempre que $x \gtrsim y$.
>
> Onde f(x) ≥ f(y) significa " f(x) maior ou igual a f(y)" e $x \gtrsim y$ significa " x pelo menos tão preferível quanto y". Assim, o que a função de recompensa faz é traduzir em números uma preferência do jogador entre dois resultados possíveis, x e y. Ou seja, uma função recompensa será aquela que, para um dado jogador, associe um valor maior igual a um resultado do jogo do que outro, se esse jogador achar ao menos tão bom o primeiro resultado quanto o segundo]. (FIANI,2015, p.47)

Representa-se a forma estratégica ou normal por uma matriz como poderemos verificar na Tabela 1.

		$\boldsymbol{Jogador\ B}$	
		$p.1$	$p.2$
$\boldsymbol{Jogador\ A}$	$P.1$	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})
	$P.2$	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})

Tabela 1: Representação algébrica da Forma Estratégia

Nesse caso, o primeiro membro do par corresponde ao Jogador da linha (Jogador A) e o segundo membro do par corresponde ao jogador da coluna (Jogador B). A caraterização do jogo pode ser feita da seguinte forma:

Estratégia dominante: É aquela na qual um jogador opta pela melhor escolha possível independentemente da decisão do outro jogador.

Equilíbrio dominante: Nesse caso, todos os jogadores possuem uma estratégia dominante. Visto que, ocorrerá entre os jogadores uma situação de interação na decisão estratégica.

Ausência de equilíbrio: Quando os jogadores escolhem uma estratégia e elas não se apresentam como estratégias dominantes. Nesse caso, cada jogador fica à mercê da decisão do outro jogador, uma vez que não se tem uma estratégia dominante. Assim, o jogador não poderá tomar uma decisão independentemente do outro jogador.

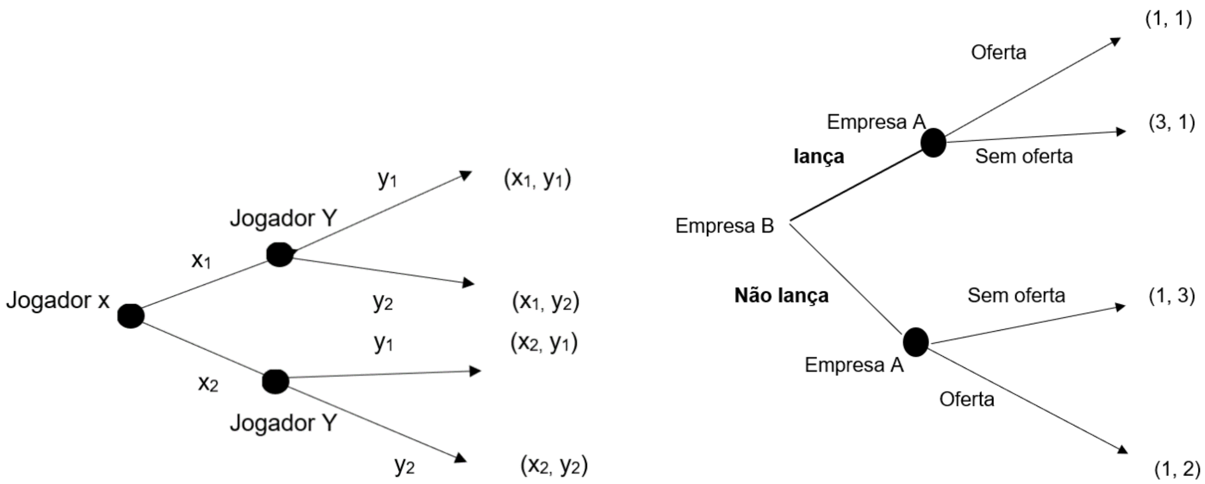
Equilíbrio de Nash ou equilíbrio não cooperativo: É a situação na qual pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia dominante. No caso do equilíbrio de Nash o jogador não terá melhoras frente as decisões do outro jogador. Ou seja, o Jogador tomará a melhor decisão para si não se preocupando com as decisões dos seus adversários.

Podemos analisar melhor a forma estratégica ou formal através do seguinte exemplo. Duas empresas A e B estão estudando a possibilidade de lançar produtos novos no mercado. Assim, a empresa que lançar o produto terá um ganho de 10 milhões de Reais e a empresa que não lançar terá lucro de zero. Se ambas lançarem conjuntamente o lucro será divido, observe a tabela. Observando a Tabela 2 podemos verificar que cada Jogador (Empresa A e B) terá uma estratégia dominante frente ao seu oponente que é lançar o produto. Logo, existirá um equilíbrio dominante que é lançar ambos o produto.

		Empresa B	
		Lançar	***Não Lançar***
Empresa A	***Lançar***	(5,5)	(10,0)
	Não Lançar	(0,10)	(0,0)

Tabela 2: Tabela sobre Estratégias Formais.

Figura 3 (esquerda) e 4 (direita): Árvore de um jogo hipotético (imagem da esquerda). Exemplo de árvore de um jogo de empresas (imagem da direita).



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.1.3.2 Forma Extensiva ou Sequencial

Na forma extensiva ou sequencial, as situações de estratégia e analise ocorrem de forma mais dinâmica, pois as decisões são tomadas ao longo do tempo. Nesse caso, nem sempre o jogador toma decisões independentemente do seu adversário, ou seja suas decisões podem repercutir em escolhas boas ou ruins no futuro. Assim, os jogadores podem analisar melhor cada jogada e resposta do seu oponente, ou vice-versa. Desta forma, os resultados (*payoffs*) podem ser avaliados dinamicamente. A representação dos jogos sequências não ocorrem através de uma Matriz, mas sim por uma árvore do jogo (FIGURA 3).

Para uma melhor compreensão, podemos analisar o seguinte exemplo: A empresa A é líder de mercado no seguimento lápis de cores. A empresa B por sua vez pretende entrar no mercado de lápis de cores disponibilizando para o público o seu produto. Nesse caso, se a empresa B entrar no mercado a empresa A faz uma oferta reduzindo seus lucros. Assim, cada empresa terá lucro de um (1) milhão de Reais. Segunda situação, a empresa B entra no mercado capitaneando boa parte dos consumidores passando a ter lucro de três (3) milhões de Reais, enquanto que a empresa B mantém um (1) milhão de Reais de Lucro. A empresa B não entra no mercado de lápis de cor e mantém seu lucro de um (1) milhão e observa a empresa

Figura 5: Aliados na Segunda Guerra

Churchill (esq.), Roosevelt e Stálin (dir.) – Foto: Arquivo

Fonte: https://www.pragmatismopolitico.com.br/2013/05/stalin-e-churchill- se-embriagaram-juntos-na-2a-guerra-revela-documento.html

A manter seus lucros no valor de três (3) milhões. Por fim, a empresa B não entra no mercado e vê a empresa A fazer oferta e reduzir seus lucros para 2 milhões. Assim, podemos montar nossa árvore conforme representado na Figura 4. Nesta figura, o primeiro valor do par corresponde a empresa B o segundo valor corresponde a empresa A.

2.1.4 Tipos de Jogos

2.1.4.1 Jogos Coorporativos

São jogos nos quais os participantes, ou Jogadores realizam estratégias de contrato, adesão ou agrupamento para a obtenção de um melhor resultado de ganhos. Nos jogos coorporativos, o resultado do grupo é a parte preponderante, ou meios nos quais foram realizados os contratos ou adesões são descartáveis. Por exemplo, na segunda guerra mundial os aliados (Estados Unidos, Inglaterra, França, União da Repúblicas Socialista Soviéticas, entre outros), vide Figura 5, estabeleceram acordos que os levaram a vitória sobre os membros do Eixo.

2.1.4.2 Jogos Não Coorporativos

São Jogos onde os participantes não estabelecem contratos de ajuda, onde a cooperação não é a fonte principal para a obtenção de resultados benéficos. Assim, cada jogador busca o melhor resultado para si. Isso não excluí a formação de adesões, auxílios entre Jogadores, ou até mesmo contratos de ajuda, porém em todos os casos busca-se um objetivo final de ganhos a cada participante.

Um exemplo é o dilema dos prisioneiros. Nessa famosa situação dois suspeitos A e B são interrogados pela polícia sobre um crime. Como a polícia não tem provas suficientes para condená-los, opta por colocá-los em celas diferentes oferecendo a ambos um mesmo acordo, que consiste:

- Se um dos suspeitos delatar e o outro ficar em silêncio, esse que delatou fica livre, enquanto o outro fica dez anos preso.
- Se ambos se mantiverem em silêncio a polícia só poderá condená-los a um ano de prisão.
- Se ambos delatarem os dois ficaram presos durante cinco anos.

A Tabela 3 representa o jogo do Dilema do prisioneiro na forma estratégica os valores numéricos usados são relacionados as penas possíveis em anos. A matriz revela que a estratégia que otimiza os ganhos pode ser dividida em duas: individual e coletiva. Enquanto que a individual aponta que a delação é o melhor resultado a coletiva indica que permanecer em silêncio é a solução que maximiza os ganhos para ambos.

		Prisioneiro A	
		Colaborador (**Silêncio**)	**Trair** (**Confessar**)
Prisioneiro B	**Colaborador** (**Silêncio**)	(1,1)	(10,0)
	Trair (**Confessar**)	(0,10)	(5,5)

Tabela 3: Tabela sobre Estratégias Formais.

2.1.4.3 Jogos Simétrico

Nos jogos simétricos a busca pelo resultado, ou pelos ganhos depende somente da estratégia dos jogadores e não dos outros jogadores. Assim, o jogo desenvolve-se na busca pelo melhor resultado é não na decisão dos jogadores. O nome simétrico vem do fato de que se os jogadores trocarem de posição os resultados permanecerão inalterados aos mesmos.

Como exemplo, citamos o dilema da caça ao veado. Nesse dilema temos dois caçadores que antes de iniciarem uma caçada precisam decidir qual animal caçar se um veado ou um coelho. O veado tem uma carne mais saborosa, mas para caçá-lo os caçadores precisarão cooperar mutuamente. Entretanto, cada caçador pode caçar alguns coelhos, porém numa área menor, uma vez que que ela estará dívida entre os dois caçadores. Assim, ambos concordam no início da caçada em caçar um veado e trabalhar em cooperação. Desta forma, ambos precisam confiar que o pacto será mantido em toda relação e que os ganhos serão obtidos.

2.1.4.4 Jogos Não simétricos

São jogos assimétricos ou Não simétricos são aqueles no qual ocorrem diferentes grupos de estratégias para cada jogador. Um bom exemplo de tal jogo do ditador. Em resumo, o jogo do ultimato ocorre da seguinte maneira: A banca concede um prêmio a uma pessoa, o líder, que deverá dividi-lo com uma segunda pessoa, o receptor, oferecendo-lhe uma oferta. Porém se o receptor recusar essa oferta, a banca não pagará nada a nenhum dos dois.

2.1.4.5 Jogos Simultâneos

São jogos onde os jogadores podem desenvolver suas estratégias simultaneamente, ou não. Mas, os jogadores desconhecem as decisões de seus oponentes. Assim, cada jogador busca-se o melhor resultado para independentemente do que realizam os seus adversários.

Por exemplo, imagine duas empresas A e B que pretendem abrir filiais. A empresa que abrir filial terá lucro anual de três (3) milhões de Reais, caso ambas abram filiais terão lucro de dois (2) milhões, caso não abram filiais terão lucro de um

		Empresa B	
		Abrir	Não Abrir
Empresa A	Abrir	(2, 2)	(1, 3)
	Não Abrir	(1, 3)	(1, 1)

Tabela 5: Jogos Simultâneos

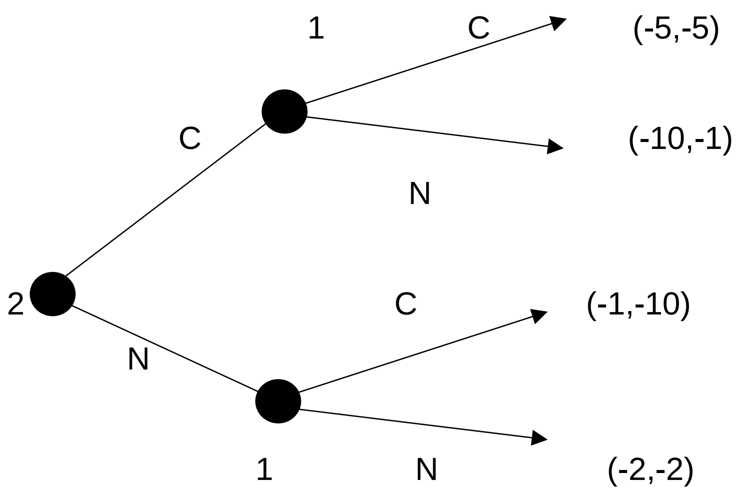
milhão. Observando a Tabela 5 é possível verificar o resultado dominante para ambas as empresas {Abrir, Não Abrir}.

2.1.4.6 Jogos Sequenciais

São Jogos onde o jogador já tem conhecimento prévio da jogada do seu adversário. Nesse caso, para uma decisão futura o mesmo poderia avaliar uma situação de escolha já ocorrida.

Como exemplo, o dilema dos prisioneiros pode também ser resolvido observando os jogos sequências e avaliando cada etapa do jogo (FIGURA 6). O Dilema do prisioneiro consiste em um jogo de estratégia, aonde dois prisioneiros possuem situações diferentes de delação (Delatar o outro prisioneiro, não delatar, ou delatar simultaneamente).

Figura 6: Dilema dos Prisioneiros



Fonte: Elaborada pelo autor.

		Empresa Doce Magia	
		Investir em Marketing	Não Investir em Marketing
Empresa Puro Doce	Lançar o Produto	$(4, 4)$	$(6, 2)$
	Não Lançar o Produto	$(2, 3)$	$(2, 5)$

Tabela 6: Estratégias Dominantes e Dominadas- Problemas de Doce

2.1.5 Tipos de Estratégias

A fim de introduzir as estratégias de um jogo, supomos duas empresas que atuam no mercado de doces. A empresa de chocolates Puro Doce está para entrar no mercado de doces de Coco. Esse mercado de doces de Coco é dominado pela empresa Doce Magia. A empresa Doce Magia está avaliando se aumenta seus gastos com Marketing para competir com a empresa Puro Doce. Para compreenderemos melhor a situação observamos a Tabela 6. Observando os dados, podemos verificar que para empresa Puro Doce o melhor é lançar o seu produto, pois indiferente do que a empresa Doce Magia fizer, a empresa Puro Doce terá um aumento da sua lucratividade.

Desta forma, podemos afirmar que {Lançar o Produto} domina a estratégia {Não Lançar o Produto} em relação e Empresa Puro Doce. É possível ainda verificar que a Empresa Puro Doce possui uma estratégia dominante {Lançar o Produto}. Por fim, ainda poderíamos verificar que a estratégia {Não Lançar o Produto} é dominada pela estratégia {Lançar o Produto}. Assim, podemos verificar que {Lançar o Produto} pela Empresa Puro é estritamente dominante com relação {Não Lançar o Produto}. Os valores numéricos da tabela 7 são meramente ilustrativos e aleatórios.

A definição algébrica para uma estratégia estritamente dominante

$$\pi_i(S_i^*, S_{-i}) > \pi_i(S^{**}i, S_{-i}), \text{ para todo } S_{-i}$$

em que S_i é a recompensa do jogador i, S_{-i} é a recompensa dos demais jogadores, $-i$ significa que estamos tratando de todos os demais jogadores, π_i é a função recompensa do jogador i, S_i^* é uma estratégia qualquer do jogador i estritamente

		$\textbf{Empresa Doce Magia}$	
		$\textbf{Investir em Marketing}$	$\textbf{Não Investir em Marketing}$
$\textbf{Empresa Puro Doce}$	$\textbf{Lançar o Produto}$	$(2,4)$	$(6,2)$
	$\textbf{Não Lançar o Produto}$	$(2,3)$	$(2,5)$

Tabela 7: Estratégias Fracamente Dominantes e Dominadas- Problemas de Doce

dominante sobre uma estratégia S_i^{**} para esse jogador. A desigualdade nos informa que a estratégia S_i é estritamente dominante as recompensas provindas pela estratégia S_i^{**}.

Há ainda o caso das estratégias fracamente dominante. Nesse caso, a estratégia pode ser melhor que em pelo menos uma situação, sendo nas demais apenas uma estratégia boa. Por exemplo, podemos analisar que se a Empresa Doce magia aumentar o investimento em Marketing, a Empresa Puro Doce terá resultados bons {lançar o Produto} ou {Não Lançar o Produto}. Entretanto, se a Empresa Doce Magia não investir em Marketing a Empresa Puro Doce terá lucros maiores caso Lance o Produto. Assim, podemos afirmar que a situação {Não Lançar Produto} é fracamente dominada pela estratégia {Lanç
ar Produto}.

2.1.5.2. Equilíbrio com Estratégias Dominantes

É o equilíbrio que ocorre quando todos os jogadores possuem uma estratégia dominante. Nesse caso, a combinação dessas estratégias é o Equilíbrio Nash também conhecido pelo nome equilíbrio com estratégias dominantes. Os valores numéricos da tabela 8 são meramente ilustrativos e estabelecidos aleatoriamente.

Um exemplo é representado na Tabela 8.

		$\textbf{Empresa B}$	
		$\textbf{Vermelho}$	$\textbf{Azul}$
$\textbf{Empresa A}$	$\textbf{Esquerda}$	$(3,3)$	$(1,0)$
	$\textbf{Direita}$	$(0,1)$	$(0,0)$

Tabela 8: Estratégias Dominantes – Equilíbrios Nash

Nesse caso, percebemos que: (i) a esquerda é a estratégia Dominante para a empresa A; (ii) Vermelho é a estratégia Dominante para a Empresa B e (iii) (Esquerda, Vermelho) é um Equilíbrio de Nash com estratégia Dominante.

2.1.5.3 $Minimax$ e $Maximin$

A ideia de $Minimax$ e $Maximin$ em jogos estritamente competitivos consiste em uma estratégia onde a decisão tomada por um jogador produz graves efeitos no seu adversário. Ou seja, o pior resultado a um jogador é o melhor resultado para seu adversário.

Sendo assim, definimos $\max_s U(s,t')$ para o que de pior pode ocorrer ao jogador das colunas se ele jogar a estratégia representada na coluna t'. A pior opção do Jogador das colunas será a melhor opção ao jogador das linhas, uma vez que estamos avaliando jogos estritamente competitivos. Por outro lado, para a expressão $\min_t U(s',t)$ avaliamos o que de pior pode ocorrer ao jogador das linhas se ele jogar a estratégia representada na linha s'. A pior opção do Jogador das linhas será a melhor opção ao jogador das colunas, uma vez que estamos avaliando jogos estritamente competitivos.

Um bom exemplo (FIANI 2009) para tal situação é a Batalha de Bismarck, vide Tabela 9. Os valores representados na tabela indicam dias de bombardeios que os aliados irão impor a frota japonesa. As maiores recompensas na coluna são $\max_s U(s,t_1) = (s_1,t_1) = 3$ e $\max_s U(s,t_2) = (s_2,t_2) = 2$. Agora, é necessário encontrar o menor valor das recompensas, assim teremos $\min_t \left\{\max_s U(s,t)\right\} = (s_2,t_2) = 2$.

		$\boldsymbol{Comboio\ Japon\hat{e}s}$	
$\boldsymbol{For\c{c}as\ Aliadas}$		$\boldsymbol{Rota\ Sul\ (t1)}$	$\boldsymbol{Rota\ Norte\ (t2)}$
	$Busca\ Rota\ Sul\ no\ Primeiro\ Dia\ (S1)$	3	1
	$Busca\ Rota\ Norte\ no\ Primeiro\ Dia\ (S2)$	2	2

Tabela 9: A Batalha do Mar de Bismark- Fiani, Ronaldo;2009

Nesse caso, o valor $Minimax$ é 2 e, consequente, a melhor opção para o comboio japonês é a rota norte buscada no primeiro dia (ou ainda, a melhor recompensa aos Japoneses é a pior opção aos aliados). Agora, é necessário encontrar o maior valor das recompensas, podemos mostrar que $\max_t \left\{ \min_s U(s,t) \right\} = (s_2, t_1) = (s_2, t_2) = 2.$ Desta maneira perceba que $Minimax(colunas) \ = \ Maximin(linhas)$, ou seja,

$$\min_t\{\max_s U(s,t)\} \ = (s_2, t_2) = \max_t \left\{ \min_s U(s,t) \right\} = (s_2, t_1) = (s_2, t_2) = 2.$$

Neste particular exemplo, o equilíbrio $Maximin - Minimax$ também é um equilíbrio Nash. Entretanto, é importante salientar que nem sempre teremos um equilíbrio de Nash, isso dependera das circunstâncias do jogo.

2.1.5.4 Estratégias Mistas

As estratégias mistas ocorrem quando o Jogador analisa dados probabilísticos para a escolha de cada estratégia. O equilíbrio de Nash ocorre quando cada jogador procura a melhor recompensa para maximizar seus resultados através de uma estratégia mista acolhida pelo outro jogador.

Para ilustrar estas estratégias tomamos o exemplo do jogo (FIANI 2009) representado na Tabela 10 (prevenção de ataque). Nesta competição, tomamos a probabilidade de azul escolher o Porto Azul como p (note que $1 - p$ é a probabilidade de azul escolhe o porto Norte). Assim, quanto mais próximo da unidade a probabilidade p estiver teremos uma maior probabilidade de azul escolher o Porto Azul. Em contrapartida, quanto mais próximo de zero a probabilidade p estiver teremos uma maior probabilidade de azul escolher o Porto Vermelho.

$\boldsymbol{Azul}$	$\boldsymbol{Vermelho}$	
	$\boldsymbol{Porto\ Sul}$	$\boldsymbol{Porto\ Norte}$
$\boldsymbol{Porto\ Sul}$	$1, -1$	$-1,1$
$\boldsymbol{Porto\ Norte}$	$-1,1$	$1, -1$

Tabela 10: O jogo de Prevenção de Ataque-Fiani, Ronaldo;2009

$Azul$	$Vermelho$	
	$Porto\ Sul$	$Porto\ Norte$
$\boldsymbol{Porto\ Sul\ (p)}$	$1,-1$	$-1,1$
$\boldsymbol{Porto\ Norte\ (1-p)}$	$-1,1$	$1,-1$
$\boldsymbol{Recompensa\ Esperada\ de\ Vermelho\ de\ Cada\ Estratégia}$	$-p+(1-p)=1-2p$	$p-(1-p)=2p-1$

Tabela 11: O jogo de Prevenção de Ataque-Fiani, Ronaldo;2009

Supomos que $p = 0.80$, ou seja 80% de azul escolher o Porto Azul, ainda teremos 20% de chance de azul escolher o porto vermelho. Assim a recompensa esperada de Vermelho por escolher o Porto Norte e dá por $R = 0.80 \times 1 + 0.20 \times (-1) = 0.80 - 0.20 = 0.60$, e ainda, a recompensa esperada de Vermelho por escolher o Porto Norte $R = 0.80 \times (-1) + 0.20 \times 1 = -0.80 + 0.20 = -0.60$. Desta forma, um Jogador terá a sua recompensa esperada por tomar uma decisão estratégica, em média, à medida que a probabilidade estratégica dos outros jogadores seja escolhida.

Podemos analisar a recompensa de Vermelho optando pelo porto Azul, como $R = 1 - 2p$, veja gráfico 1. Note que para $p = 1$ temos a recompensa máxima e que $p = 0$ resulta na recompensa mínima.

Graficamente podemos analisar da seguinte forma

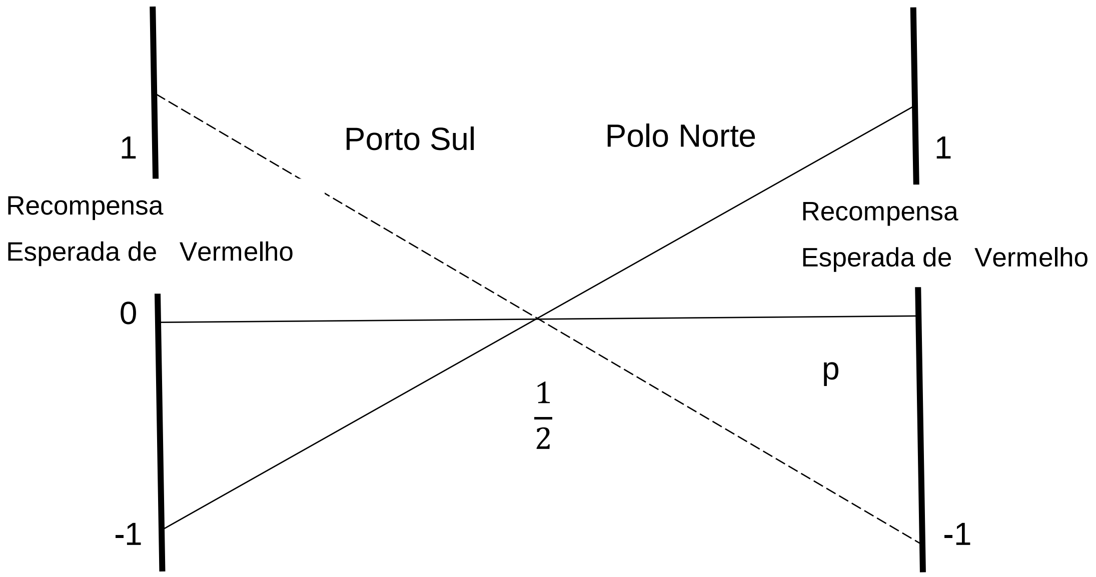


Gráfico 1: Recompensas Esperadas vermelho, Dada a Estratégia Mista Azul- Fiani 2009

Figura 7: Neumann e Ulam

Fonte: https://around.com/glimpse-of-the-past/

2.2 O MÉTODO DE MONTE CARLO

2.2.1 Breve Digressão

O método de Monte Carlo surgiu no início do século XIX com atividades relacionadas à análise e avaliação do comportamento de dados aleatórios de estatística, bem como a sua influência na tomada de decisões. No final da década de 40 através da publicação do artigo "*Monte Carlo Method*" escrito por Jhon Von Neumann e Stanislav Ulam (veja a Figura 7) essa área de pesquisa passou a ganhar destaque em várias áreas do conhecimento, tais como: Física de Partículas, estudos macros econômicos, estudos microeconômicos, sociológicos, médicos entre outros. Nesse trabalho, Ulam e Neumann, auxiliados pelo advento do surgimento dos primeiros computadores propõem uma análise de dados aleatórios estabelecendo simulações dos possíveis efeitos de tais resultados. Assim, são analisadas sequências de números e o efeito do comportamento frente a uma determinada pesquisa, ou assunto. Essas análises eram realizadas por meio de amostragens com sucessivas repetições até que se encontrassem conclusões que refutassem, ou aceitassem os dados analisados.

2.2.2 Geração de Números Aleatórios

Para obtenção de eventos aleatórios é necessário a geração de números aleatórios. Uma alternativa viável no âmbito computacional são os geradores pseudoaleatórios (sequência determinísticas de números). Um dos geradores envolvendo pseudoaleatórios é conhecido pelo nome de gerador de congruência linear. Nesse caso, se define um intervalo de números reais entre $(0{,}1)$ dividindo-os por x. A equação que representa o gerador de congruência linear é

$$R_n = (aR_{n-1} + c)\ (mod\ m); \quad i_n = \frac{R_n}{x}$$

em que a $(0 < a < m)$ e c $(0 \leq c < m)$ como constantes inteiras o número R_n é obtido a partir do número R_{n-1}, a operação $mod\ m$ é obtida com definição de uma semente x_0 $(0 \leq x_0 < m)$ previamente definida e i_n é um número gerado no intervalo $(0{,}1)$.

2.2.3. Método da Transformação Inversa

Dado um valor aleatório de x contínuo, que atenda a condição $x_{min} \leq x \leq x_{máx}$ podemos obter um valor de x que pertença a um determinado intervalo (a, b) através da probabilidade, para tal usamos a seguinte relação probabilística $p = (x|\ a < x < b)$. Se tomarmos um a valor x_1 menor que x, e um outro valor $x_1 + dx$ maior que x, teremos $p = \{\ x|x_1 < x < x_1 + dx\} = p(x)dx$. Dado que $p(x)$ é a função densidade de probabilidade (FDP) com as seguintes propriedades: $p(x) \geq 0$ e $\int_{xmín}^{xmáx} p(x)d(x) = 1$. Desta maneira, temos $\int_{xmín}^{x} p(x')d(x') = c(x)$ em que $c(x_{\text{min}}) = 0$ e $c(x_{\text{máx}}) = 1$. Assim, a função FDC tem uma função inversa de $p(x)$ definida, assim $c^{-1}(\xi)$. Desta forma, a função $\xi = c(x)$ assume-se como uma variável estocástica nova com valores no intervalo $(0{,}1)$. Estabelecendo uma relação entre os valores de x e ξ, podemos verificar que a FDP de ξ. Por fim, verificamos que se estabelece a relação $p\xi(\xi)d\xi = p(x)dx$, que resultará ainda em

$$p\xi(\xi) = p(x)\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-1} = p(x)\left(\frac{p(x)}{dx}\right)^{-1} = p(x)[p(x)]^{-1} = 1$$

Agora podemos verificar que ξ está distribuído no intervalo $(0,1)$. O que caracteriza que ξ é um número aleatório. Assim, se tomarmos uma variável x representada em $p^{-1}(\xi)$ teremos uma FDP $p(x)$. Caso se queira obter um valor de x com números gerados aleatoriamente e distribuídos no intervalo [0,1]. Podemos utilizar a seguinte relação $\xi = \int_{xmín}^{x} p(x')d(x')$ que denominamos de equação de interpolação da variável x. Tal equação se torna bastante propícia para FDP's que sejam analisadas por expressões analíticas.

2.2.4 O Método da Rejeição de Neumann

A rejeição de Neumann baseia-se em testes repetidos que podem ser compilados, assim:

(i) Escolha um número aleatório $c_1(x)$ que seja uniformemente distribuído no intervalo $[0,1]$, após a escolha transforme-o em um número x_1 uniformemente distribuído no intervalo $[x_{mín}, x_{máx}]$. O procedimento deverá ser repetido com todas as variáveis existentes.

(ii) Agora escolha novamente um número aleatório $c_2(x)$ também uniformente distribuído no intervalo $[0,1]$ e verifique a seguinte relação de desigualdade:

$$c_2(\mathrm{x})\mathrm{r} < \mathrm{p}(x_1)$$

Nesse caso, r será o máximo absoluto de $p(x)$. Assim, caso a desigualdade se confirme, x_1, torna-se uma variável aleatória deseja. Porém, se a desigualdade for falsa retiramos o par (c_1(x), c_2(x)) e retornamos ao início do processor. Realizaremos o processo quantas vezes for necessário até variável ser adequada.

2.2.5 Medidas Estatísticas e Incertezas

Nas simulações envolvendo o método de Monte Carlo, quando estamos interessados em uma grande quantidade de valores com um tamanho N. Estipulamos um valor médio Q para uma simulação de N valores, tal evento pode ser assim representado

$$Q = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} q_i$$

em que q_i é o i-ésimo valor da sequência, ou dos valores que estão sendo estudados. Além disso, é possível obter o desvio estatístico pode ser obtido da seguinte forma

$$\sigma_q = \sqrt{\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n}(q_i^2 - Q^2)\right]}$$

Vale destacar que quando N assume valores muito grandes, σ_q, passa a ser a incerteza da simulação de Monte Carlo.

2.2 MODELOS ECONÔMICOS PARA O COMPORTAMENTO DAS EMPRESAS

O mercado empresarial e coorporativo e composto por várias empresas atuantes em diversos seguimentos. Por sua vez, esses ramos de atuação podem trazer vários concorrentes atuantes em um determinado seguimento empresarial. A isso denominamos de Oligopólio. Numa situação de ocorrência de Oligopólios, a entrada em atuação de novas empresas fica muito restrita, seja pela atuação dominante das cooperações que lá já existem e atuam, seja pela dominação tecnológica que essas entidades empresárias detêm. Podemos compreender tal efeito dominante através da detenção de patentes. Assim, por exemplo, uma empresa do ramo de pneus automobilísticos terá o domínio de certos produtos desenvolvidos e patenteados por ela, o que restringirá a entrada em atuação de novas empresas. Desta forma, o mercado fica restrito as gigantes Pirelli, Goodyer, Michelen, Levorin e outras de médio porte com atuação mais específica.

Para um estudo mais significativo de como ocorre a formação de mercados sem cooperação, trataremos de casos envolvendo duas empresas a qual chamaremos de duopólio. Para tanto, imaginamos a seguinte situação de atuação de duas empresas, a Empresa A e a Empresa B, ambas atuantes em um mercado homogêneo. Supomos que as empresas concorrerão em duas frentes: preço ao consumidor e quantidades de produção de cada uma delas. Nesse caso é possível que uma das empresas estabeleça os seus preços e as quantidades a serem produzidas primeiro que a outra. Quando uma empresa estabelece seus preços antes da outra a chamamos de líder de preço, enquanto que a outra empresa denominamos de seguidora de preço. Da mesma forma uma das empresas pode ser a líder de quantidade, e enquanto que a outra será a seguidora de quantidade. A essas estratégias chamamos de jogo sequencial**.** Outra situação bastante relevante é a de tomadas de decisões sem conhecer a escolha do seu concorrente. Esse processo por sua vez e denominado de jogo simultâneo**.**

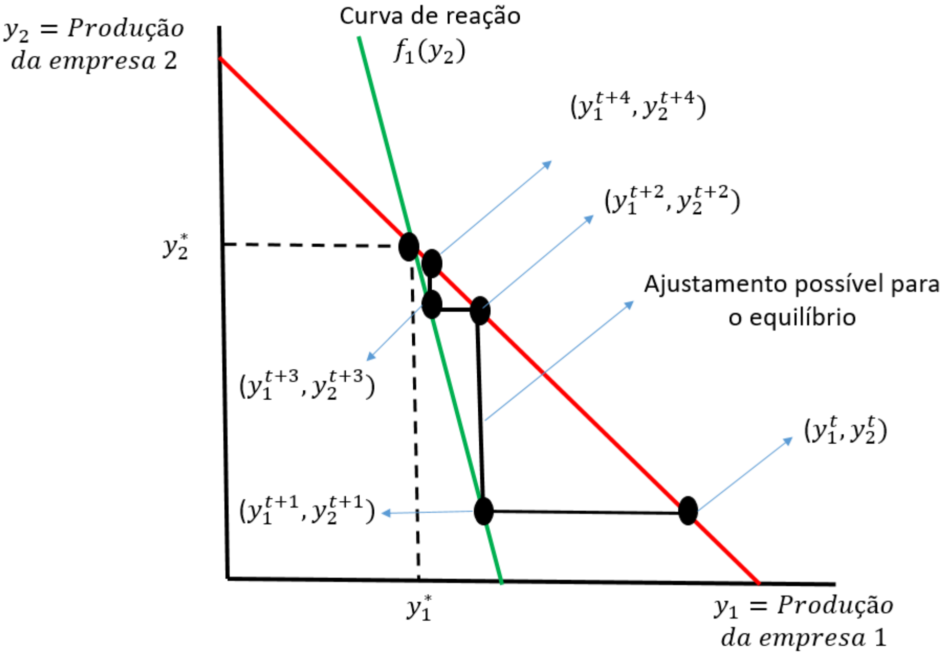
2.3.1 Modelos sem Cooperação

Nos modelos, sem cooperação, as decisões das empresas, ou jogadores são tomadas sem considerar as decisões de outras empresas ou outros jogadores. Ou seja, um tomada de atitude de aumento de preço, de diminuição de quantidade de produtos, ou de lançamento de novos produtos será feita sem levar em consideração o que estão ou farão seus rivais de mercado, ou jogo. Assim, uma empresa busca sempre uma maximização dos seus lucros tomando decisões que possam ou venham a potencializar isso.

2.3.1.1 Modelo de Cournot

A situações onde a escolha das empresas é tomada sem conhecer as decisões de suas rivais, ou seja, uma empresa pode escolher a quantidade de produto a ser produzida, ou definir seus preços sem levar em consideração as empresas correntes em seu mercado de atuação. Nesse caso, cada empresa procura maximizar seus lucros sem importa-se com as decisões de seus rivais. Esta situação é conhecida como modelo de Cournot.

Figura 8: Gráfico envolvendo o equilíbrio de Cournot



Fonte: O equilíbrio de Cournot (VARIAN, H.R, 2000, p.519)

No modelo de Cournot, cada empresa irá procurar aumentar os seus rendimentos propondo sempre as melhores escolhas para si. Porém, para obter a melhor rentabilidade possível, ela deverá fazer previsões e suposições sobre as empresas concorrentes e as estratégias que elas estão tomando sobre a sua produção.

Num cenário, onde existem duas empresas 1 e 2, podemos avaliar que a empresa 1 avalia que a empresa 2 irá produzir y_2^e unidades, onde $\boldsymbol{e}$ significa a produção esperada (VARIAN, H.R, 2000). Assim, caso a empresa 1 procure produzir y_1 unidades, ela irá procurar produzir $y = y_1 + \ y_2^e$, de forma que essa produção gere um preço de $p(y) = p(y_1 + \ y_2^e)$. Assim, o preço de maximização de lucro da empresa 1 é $\max_{y_1} p(y_1 + \ y_2^e)y_1 - c(y_1)$.

Analisando a expressão anterior verificamos que para qualquer escolha y_2^e da empresa 2, ocorrerá uma ótima escolha y_1 para a empresa 1. Assim, podemos representar tal situação da seguinte forma: a ótima escolha para a empresa 1 e a produção possível para a empresa 2, ou seja, $y_1 = f_1(y_2^e)$. Essa formulação caracteriza a função reação que é a melhor escolha ou expectativa de uma empresa frente a escolha de sua empresa rival. Desta forma, derivando a curva de reação da empresa 2 temos $y_2 = f_2(y_1^e)$. O ultimo resultado trata da melhor escolha da empresa 2 frente a uma produção da empresa 1, y_1^e . É importante salientar que cada Firma irá procurar escolhas de produção em que a Firma concorrente tenha y_1^e ou y_2^e como alternativas. Nesse caso, o nível de excelência da empresa 1, y_1 , se torna diferente da exceptiva que a empresa 2 que tem y_1^e.

Desta forma, procuramos uma situação de combinação (y_1^*, y_2^*) de produção. Para obter um nível excelente de produção da empresa 1, supõe-se que a empresa 2 produza y_2^*. O contrário também valido, uma vez que o nível ótimo da empresa 2 será quando a empresa 1 obtiver y_1^*. Tal situação pode ser assim definida $y_1^* = f_1(y_2^*)$ e $y_2^* = f_2(y_1^*)$. Esta combinação de produção recebe o nome de Equilíbrio de Cournot.

No equilíbrio de Counot, cada empresa busca a maximização de lucros a partir da tomada das suas decisões. Tal efeito se verifica através do equilibro, pois cada uma das empresas procura uma produção ótima sobre o olhar da sua empresa concorrente

Como exemplo, supomos que as empresas possuam demandas lineares e custos marginais nulos. Desta suposição é possível demostrar as expressões de reação das empresas 1 e 2 dadas, respectivamente, por $y_1 = (a - by_2^e)/(2b)$ e $y_2 = (a - by_1^e)/(2b)$.

Na Figura 8 apresentamos as retas que representam o comportamento das empresas, bem como a intersecção entre elas (equilíbrio de Cournot). No ponto de intersecção entre as retas ocorre a maximização de lucros de ambas, uma vez que nesse ponto em comum apresenta-se as expetativas de comportamento das duas empresas.

Agora podemos fazer uma análise algébrica do equilíbrio de Cournot. Nesse caso, estamos interessados no ponto (y_1, y_2), que é a situação onde a empresa toma a sua decisão, conforme a expectativa da sua rival a respeito dela. Denotando $y_1 = y_1^e$ e $y_2 = y_2^e$ o que gera as seguintes equações

$$y_1 = \frac{a - by_2}{2b} \quad e \quad y_2 = \frac{a - by_1}{2b}$$

Nessa situação, podemos verificar que as expressões são iguais para as duas empresas. Desta forma, podemos assumir $y_1 = y_2$ o que resulta em

$$y_1^* = y_2^* = \frac{a}{3b}.$$

E, consequentemente, a seguinte relação para a produção total

$$y_1^* + y_2^* = \frac{2a}{3b}.$$

2.3.1.2 Modelo de Bertrand

No modelo anterior de Cournot supomos que as empresas faziam as escolhas de suas quantidades, a fim de que pudessem maximizar seus lucros deixando para o mercado agir sobre os preços. No modelo de Bertrand, ao contrário de Cournot, as empresas irão fixar seus preços. Agora o mercado irá agir sobre as quantidades a serem vendidas. Quando uma empresa fixar os seus preços ela deverá imaginar os preços da sua concorrente, ou seja, como no modelo de Cournot (maximização através das quantidades) o modelo Bertrand procura maximizar seus lucros através da situação de par de preços (VARIAN, H.R, 2000).

Consideraremos duas empresas produzindo produtos idênticos, de forma que o consumidor não perceba a diferença entre elas. Imaginemos que as duas empresas estabeleçam seus preços simultaneamente. Assim, a empresa que tiver o maior preço terá lucro zero, porém caso os valores sejam iguais as empresas irão dividir os seus lucros. Nesse caso, procuramos uma situação hipotética onde cada empresa deverá anteder sozinha o mercado, isso só irá ocorrer caso o preço seja maior ou igual ao custo marginal.

Podemos ilustrar a situação supondo que a curva de demanda das empresas igual a $q(p) = 100 - p$. É possível perceber que a quantidade de demanda está escrita em função do preço. Nesse caso, é preciso avaliar como a demanda das empresas reagirá frente a opção de preço de cada empresa. Para essa analise iremos considerar as duas empresas com a mesma função de recompensa, para uma empresa i, que poderá ser utilizada em qualquer uma das duas empresas. Para a empresa concorrente adotaremos a empresa j.

O mesmo se estende para a função custo $C(q_i) = cq_i,\ com\ c > 0$. A função de recompensa da empresa i, pode ser assim representada

$$\pi_i = \begin{cases} (p_i - c)(100 - p)\ se\ \ p_i < \ p_\mathrm{j} \\ \dfrac{(p_i - c)(100 - p)}{2}\ se\ \ p_i = \ p_\mathrm{j} \\ 0\ se\ p_i > \ p_j \end{cases}$$

Podemos analisar a representação da linha 1 como: o lucro da empresa 1 é dado pelo produto da margem de lucro $(p_i - c)$ pela quantidade de demanda $(100 - p)$, desde que $p_i < \ p_\mathrm{j}$. Na linha 2 temos a divisão por 2 dos lucros, pois temos $p_i = \ p_\mathrm{j}$, ou seja, os lucros das empresas serão divididos porque o preço das empresas será o mesmo. Por fim, se empresa 1 tem um preço maior que o da empresa 2 o que gera nela um lucro zero.

No intuito de explorar o comportamento do modelo de Bertrand a restrição de capacidade, retomamos a última situação (demanda $q(p) = 100 - p$) delimitando a produção de cada empresa a 70 unidades. Isso irá gerar mudanças competitivas importantes, pois a empresa com menor preço poderá não atender à todos os seus consumidores. Nesse caso, as empresas de menor preço e maior deverão adotar certos critérios de escolha para atender os consumidores. Uma opção para a empresa de menor é atender primeiramente os clientes que valorizam mais o seu produto. Assim, os consumidores que valorizam o produto são na verdade aqueles que procuram o menor preço. A isso dá-se o nome de regra de racionamento eficiente para determinar um critério entre os clientes.

Analisaremos a situação onde a empresa i terá menor preço que a empresa j, tal situação pode ser ilustrada, assim $p_i < p_j$. Uma vez definido os preços inicias precisaremos analisar quanto de consumidores a empresa i irá conseguir atender até esgotar a sua demanda. Dada a função demanda $q(p) = 100 - p$, com $p_i < p_j$, podemos tomar $p_i = p$. Desta forma, sabendo que a empresa i tem um preço inferior ao da empresa j, quando a empresa i tiver um preço de 40 reais inferior ao dá empresa j, ela irá produzir $q(p) = 100 - 40$ (ou seja 60 unidades).

Agora é preciso levar em consideração a situação pré-estabelecida da empresa i e da empresa j, na qual a produção é de no máximo 70 unidades, ou seja, a equação $100 - p_i$ só será válida se a produção for igual, ou inferior a 70 unidades. Observando a equação $100 - p_i$ verificamos que quando a quantidade é superior a 70 unidades, a empresa que estiver com o menor preço venderá no máximo 70 unidades.

Algebricamente podemos definir a função da seguinte forma $min\,\{100 - p_i, 70\}$. Essa expressão nos indica que a empresa i que possui o menor preço entre as duas terá seu valor determinado por $100 - p_i$ para um valor de 70. Como na ideia anterior do modelo de Bertrand podemos, novamente, analisar a ideia de custo realizando pequenas alterações. Assim, termos $C(q_i) = cq_i, com\ c > 0, se\ q_i < 70;\ C(q_i) = \infty\ se\ q_i > 0$. Avaliando a expressão é possível notar que quando o custo será dado cq_i sempre que a produção for igual ou inferior a 70, caso contrário, o custo da produção será infinito, o que nos permite analisar que a empresa sofre restrição na sua capacidade. Definindo a função recompensa, π_i, da empresa i (análoga a da empresa j).

$$\pi_i = \begin{cases} (p_i - c)min\{100 - p_i\}\ se\ \ p_i < \ p_{\mathrm{j}} \\ \dfrac{(p_i - c)(100 - p_i)}{2}, se\ \ p_i = \ p_{\mathrm{j}} \\ 0\ se\ p_i > \ p_j,\ p_j \geq 30 \\ (p_i - c)(100 - p_i - 70)\ se\ p_i > \ p_j,\ p_j < 30 \end{cases}$$

A primeira linha da função recompensa nos informa o valor máximo de obtenção de lucro da empresa i quando o seu preço e inferior ao da empresa j. Na segunda linha temos uma divisão de mercado, pois ambas as empresas possuem os mesmos preços. A terceira equação informa que se a empresa j ofereça um preço inferior ao da empresa i, e se esse preço for igual o inferior a 30 reais, não restará mercado para as vendas da empresa i. A última linha também nos indica uma situação onde a empresa j tem preço inferior ao da empresa i. Note em relação a esta linha o fato de ser estritamente inferior a 30 reais. Desta forma, mesmo que a empresa j opere em capacidade máxima ela não conseguirá satisfazer a demanda do mercado.

2.3.2 Modelos com Cooperação

No modelo de cooperação a tomada de decisão de um jogador, ou de uma empresa e feita com base nas estratégias de seus rivais. Assim, uma empresa que pretenda aumentar a sua produção, ou melhorar os seus preços irá avaliar quais serão as possíveis reações de seus adversários, tomando a partir daí a melhor decisão para a maximização dos seus preços.

2.3.2.1. Modelo de Cartel

Quando empresas passam a atuar juntas para a determinação de produção e definição de preços, a fim de obter uma maximização dos seus lucros damos a isso o nome de Cartel**.** O como nos define Fiani na seguinte passagem:

> Diz-se que empresas formaram uma coalizão ou seus preços. Um cartel é um grupo de empresas competidoras que fizeram uma coalizão, de forma a maximizar seus lucros se comportando como se fossem uma empresa monopolista. (FIANI,2015, p.261)

Assim, as empresas passam a atuar na definição das quantidades de produção, para poderem elevar os preços obtendo uma maximização dos seus lucros. Outra situação pode ser a combinação prévia de preços, o que nesse caso, irá caracterizar um monopólio.

Tal situação pode ser verificada atualmente no preço da gasolina nos postos de revenda de combustíveis, uma vez que a venda do litro da gasolina mantém-se muito parecida em todos os postos. Ocasionando a situação de Cartel.

Como exemplo, supomos duas empresas definido suas produções, a fim de que ambas possam obter os maiores lucros possíveis. Assim, sejam y_1e y_2 as produções das empresas para a maximização dos seus lucros $\max\limits_{y_1,y_2} p(y_1 + y_2)[y_1 + y_2] - c_1(y_1) - c_2(y_2)$ (VARIAN, H.R, 2000). A partir desta equação teremos as condições para uma situação de qualidade ótima, ou seja,

$$p(y_1^* + y_2^*) + \frac{\Delta p}{\Delta Y}[y_1^* + y_2^*] = CM_1(y_1^*)$$
$$p(y_1^* + y_2^*) + \frac{\Delta p}{\Delta Y}[y_1^* + y_2^*] = CM_2(y_2^*).$$

em que CM_i refere-se ao custo marginal da empresa i.

As análises dessas situações (equações anteriores) podem ser estabelecidas na medida em que, a empresa 1 procura expandir sua produção em Δy_1, surgem dois efeitos importantes. Primeiro os lucros das vendas adicionais por uma produção maior, segundo a redução do seu lucro devido aos preços menores. Porém, no segundo efeito devemos levar em consideração não só o preço mais baixo da empresa 1, mas também o seu efeito sobre a produção da empresa 2. Esse fato ocorre dado que a maximização dos lucros está agora sobre toda a indústria e não mais sobre uma única produção. Nesse caso, a melhor escolha de situação será com ambas as receitas marginais, sendo iguais. Ou seja, $CM_1(y_1^*) = CM_2(y_2^*)$ o que evidencia os custos marginais em equilíbrio. Na solução de cartel, mesmo que uma empresa tenha vantagem em seus custos ficando com a sua curva marginal abaixo da curva da sua rival, ela não estará vantagem, mas em equilíbrio de cartel.

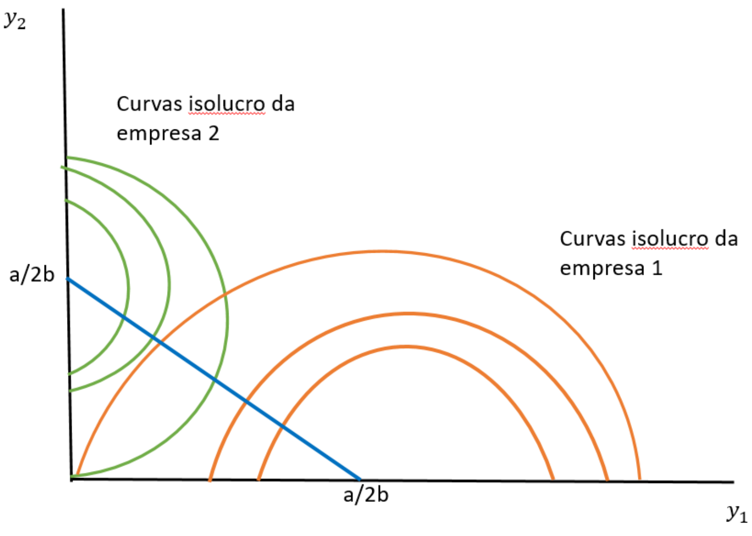
As dificuldades, numa situação de cartel, são com os concorrentes tentando trapacear as regras. Tomando uma situação com duas empresas, que procuram maximizar seus lucros nos seus setores de atuação teremos (y_1^*, y_2^*) supondo que a empresa 1 procure aumentar a sua produção em Δy_1. Assim, seu lucro marginal será representado, como

$$\frac{\Delta \pi_1}{\Delta y_1} = p(y_1^* + y_2^*) + \frac{\Delta p}{\Delta Y} y_1^* - CM_1(y_1^*).$$

Analisando a otimização da solução de cartel, podemos concluir que $\Delta p/\Delta Y$ é negativo, o que irá gerar uma curva de inclinação negativa, ou seja $\Delta \pi_1/\Delta y_1 > 0$. Podemos avaliar que a empresa 1 espera que a empresa 2 mantenha sua produção, a fim de que ela possa aumentar a sua produção e por consequência seus lucros. Porém, em uma situação de cartel as empresas agem juntas para manter para não prejudicar o mercado.

Nos problemas de mercado envolvendo cartel as empresas sempre estão a analisar o aumento e a redução de suas produções, de forma a maximizar seus lucros e aumentar a sua produção. Desta forma, uma empresa sempre irá procurar o aumento da sua produção para a obtenção do maior lucro possível. Caso a empresa 1 espere uma manutenção da produção da empresa 2, ela irá avaliar o aumento da sua produção, porém se ela imaginar um aumento da produção da empresa 2, ela desejará um aumento da sua produção antes. Ou seja, cada empresa irá sempre buscar a melhor situação para si. Nesse caso, a situação de mercado só se manterá

Figura 8: Gráfico de curvas de isolucro modelo de Cartel



Fonte: Um cartel (VARIAN, H.R, 2000, p.522)

com a punição de atividades envolvendo a trapaça. Pois, caso elas não possuam uma análise de aumento de produção o cartel poderá quebrar ou ruir.

Calculando carteis com custos marginais igual a zero

$$\pi(y_1, y_2) = [a - b(y_1 + y_2)](y_1 + y_2) = a(y_1 + y_2) - b(y_1 + y_2)^2$$

As igualdades dos custos e receitas marginais serão $a - 2b(y_1^* + y_2^*) = 0$, o que resultará em $y_1^* + y_2^* = a/(2b)$. Assim, a divisão entre as empresas não faz diferença, uma vez que os custos marginais são zero. Na verdade, o que de fato importa são os níveis de produção das empresas. Tal situação poderá ser observada na Figura 8. Nesta figura podemos analisar ambas as curvas isolucro das empresas, bem como o local das tangentes comuns. Como, em situações de Cartel busca-se a maximização de todos da atividade afim e possível perceber que que as curvas de lucro decorrentes da produção devem sempre ser as mesmas. Tal analise nos permite perceber que a inclinação das curvas isolucro devem ser idênticas.

2.3.2.2 Liderança de Quantidade.

A liderança de quantidade ocorre quando uma empresa faz a escolha antes de sua concorrente. Tal evento também é conhecido pelo nome de Modelo de Stackelberg. Este modelo é muito utilizado para explicar a situação de empresas dominantes em determinados ramos de mercado (VARIAN, H.R, 2000).

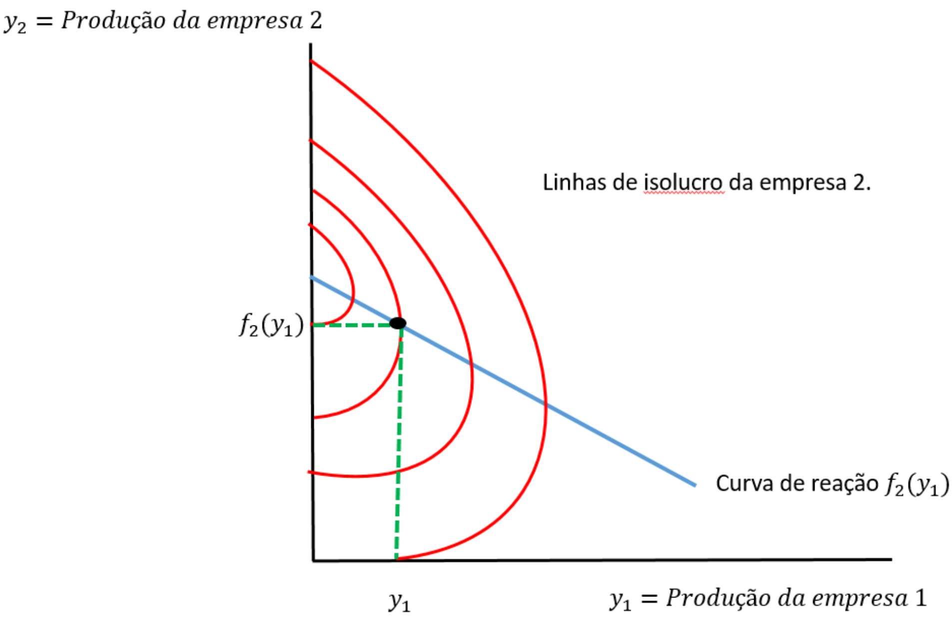
Um bom exemplo disso é a indústria Randon líder no Brasil no ramo de carrocerias de caminhões. Pode-se notar que as demais empresas tomam suas decisões a partir da atuação da empresa líder de mercado, nesse caso, a Randon.

Podemos sintetizar o modelo de Stackelberg da seguinte forma: (i) a empresa1 produz uma quantidade y_1 e (ii) a empresa 2 produz uma quantidade y_2. Ambas as empresas sabem que o equilíbrio do mercado depende da quantidade total produzida. O equilíbrio é denominado através da função demanda inversa $p(\gamma)$, onde o preço de equilíbrio é atingido como função da produção do setor $\gamma = y_1 + y_2$. Por fim, a empresa líder terá que analisar seus lucros a partir da empresa seguidora (essa por sua vez tentará maximizar seus lucros).

Passaremos a avaliar o comportamento da empresa seguidora. Para tanto, imaginamos que a seguidora queira maximizar os seus lucros $\max\limits_{y_2} p(y_1 + y_2)y_2 - c_2(y_2)$. O lucro obtido pela seguidora estará ligado a produção da líder, entretanto sobre a visão da empresa seguidora, a produção da empresa líder é predeterminada. Uma vez que, a líder já conclui a produção. Sendo, assim, a empresa seguidora encara essa produção como uma constante. A seguidora busca então uma situação onde o seu nível de produção estabeleça uma relação de igualdade entre o custo marginal e a receita marginal. A receita marginal é dada por $RM_2 = p(y_1 + y_2) + (\Delta p/\Delta y_2)\Delta y_2 \ = CM_2$. Na medida em que a empresa seguidora aumenta sua produção, também ocorre um aumento na sua receita, uma vez que ela vende mais produtos no mercado. Entretanto, ela empurra o preço para um valor menor em Δp, o que resulta numa diminuição dos seus lucros em todas as unidades já vendidas em produtos vendidos com o preço mais alto.

Devemos notar que a escolha maximizadora de lucros da empresa seguidora estará diretamente ligada a escolha da empresa líder. Resultando na seguinte relação $y_2 = f_2(y_1)$. Observamos que $f_2(y_1)$ é a produção maximizadora de lucro da empresa seguidora a partir da escolha da empresa líder. Assim, a função recebe o nome de

Figura 9: Curva de reação –Modelo deStackelberg



Fonte: Derivação de uma curva de reação (Varian, H.R, 2000, p.506)

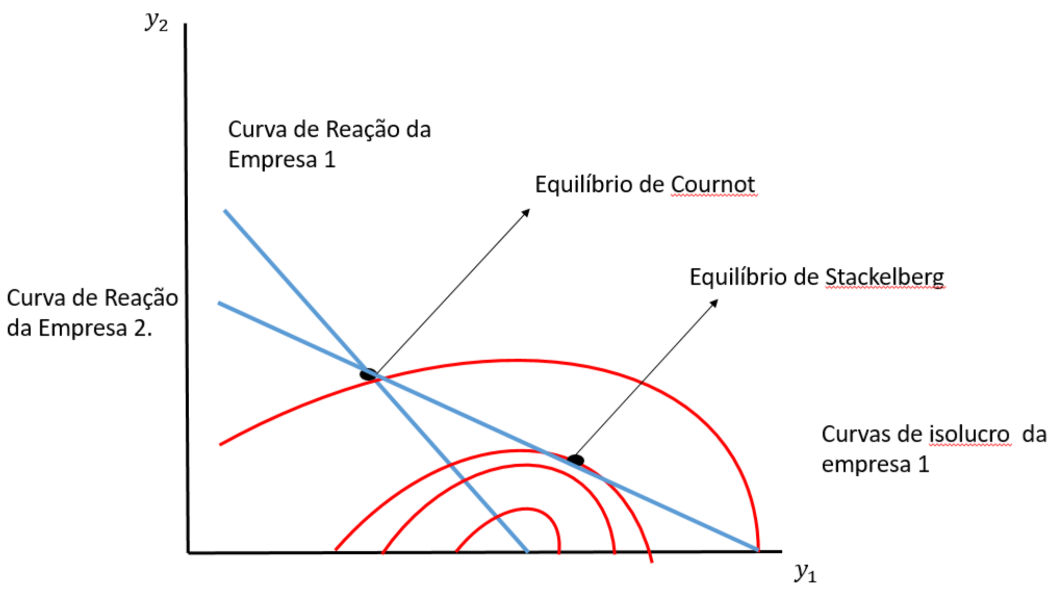
função de reação, pois é uma reação da empresa seguidora frente as escolhas da empresa líder. Tomamos a função da demanda inversa que assume a forma $p(y_1 + y_2) = a - b(y_1 + y_2)$,onde p é o preço de produção e a, b constantes reais.

Para uma melhor compreensão dos resultados consideremos os custos iguais a zero. Assim, teremos a função lucro da empresa 2 $\pi_2(y_1, y_2) = ay_2 - by_1y_2 - by_2^2$. A partir dessa expressão poderemos ilustrar as retas isolucro que irão vislumbrar as possíveis combinações de (y_1, y_2) satisfazendo a equação $\bar{\pi}_2 = ay_2 - by_1y_2 - by_2^2$.

A partir da Figura 9 podemos verificar que a empresa 2 terá lucros maiores, à medida que nos movimentarmos para a esquerda. Seu lucro máximo irá culminar com a empresa 1 produzindo zero unidades. Assim, para cada escolha da empresa 1 a empresa dois procurará uma escolha que lhe coloque mais à esquerda da reta isolucro, a fim de que obtenha o lucro máximo frente a cada escolha da empresa 1.

De modo que possamos analisar de maneira algébrica o comportamento de tal situação, enfatizaremos uma análise da função lucro da empresa 2, isto é, $RM_2(y_1, y_2) = a - by_1 - 2by_2$. Tal representação é facilmente obtida a partir da derivação, assim quando igualarmos a receita marginal ao custo marginal e

Figura 10: Equilíbrio de Stackelberg.



Fonte: Equilíbrio de Stackelberg (VARIAN, H.R, 2000, p. 509)

manipulamos a equação que emerge obtemos $y_2 = (a - by_1)/(2b)$ (expressão representa pela reta na Figura 9).

Agora investigamos o comportamento da empresa líder. A exemplo da seguidora, esta empresa deve supor que suas decisões afetam diretamente as escolhas da outra empresa, e que tal situação pode ser representada pela função $f_2(y_1)$. Assim, uma vez que a empresa líder realizar as suas escolhas ela deverá saber que tais escolhas influenciam na tomada de decisões da empresa seguidora. Agora podemos analisar tal situação sobe o olhar da maximização da empresa líder conforme verificaremos, isto é, $max_{y_1}\, p[y_1 + f_2(y_1)]y_1 - c_1(y_1)$ dado que $y_2 = f_2(y_1)$. Podemos observar que quando a empresa líder faz a sua escolha a partir de y_1, a sua produção total será $y_1 + f_2(y_1)$. Ou seja, a sua própria produção mais a produção da empresa seguidora

Uma vez tomada as suas decisões, a empresa líder, deve reconhecer que suas análises terão grandes influências nas orientações de atuação da empresa seguidora. Presumindo que os custos marginais são zero, os lucros da líder serão expressos pro $\pi_1(y_{1,}y_2) = p(y_1 + y_2)y_1 = ay_1 - by_1^2 by_1 y_2$. Ainda, assim a produção da empresa seguidora y_2, irá depender da escolha da empresa líder, através da função reação $y_2 = f_2(y_1)$. Simplificando a expressão, teremos $\pi_1(y_{1,}y_2) = ay_1/2 - by_1^2/2$. Sendo, assim a receita marginal dá será $RM = a/2 - by_{1.}$ Igualando tal situação ao custo marginal e resolvendo para y_1, temos $y_1^* = a/(2b)$ e, consequentemente, $y_2^* = a/(4b)$

Por fim, o resultado devido a Stacklerberg pode ser observada na Figura 10. Visualizamos as curvas de reação das duas empresas, bem como as curvas isolucro da empresa 1.

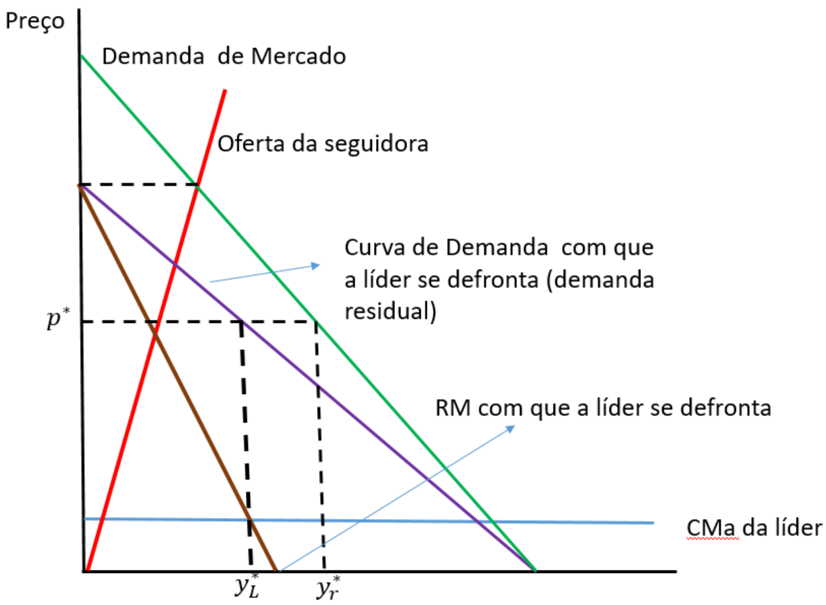
2.3.2.3 Liderança de Preço

Ao contrário da situação de controle de quantidade para maximizar os lucros, a empresa líder poderá definir o preço levando em consideração o comportamento da empresa seguidora. Para tal analise é preciso compreender como irá agir a empresa seguidora para a obtenção de seus lucros. Para a compreensão do comportamento da empresa seguidora é preciso avaliar o equilíbrio, que ocorre sempre com a empresa seguidora igualando o seu preço ao da empresa líder, supondo é claro que ambas as empresas façam vendas de um mesmo produto (VARIAN, H.R, 2000).

Agora, estabelecendo que a empresa líder tenha um preço p. Iremos avaliar a análise da empresa seguidora como se de fato esse fosse o preço, ou seja, ela comporá sua maximização a partir da hipótese dada. Assim, a seguidora tomará o preço da empresa líder como fora de seu controle de atuação. Desta forma, a obtenção da maximização dos lucros da seguidora será $\max_{y_2} py_2 - c_2(y_2)$. Tal situação levará a empresa seguidora a buscar um nível produção onde o preço se iguale ao custo marginal. O que determinará sua curva de oferta $S(p)$. Essa ocorrência pode ser verificada na Figura 11.

Agora iremos verificar a situação da empresa líder. No instante em que a líder fixar um preço p, a seguidora responderá com uma oferta $S(p)$. Isso, significa que a produção total que a líder irá vender é $R(p) = D(p) - S(p)$. Sendo, essa a curva de demanda residual da líder. Analisando uma situação onde a empresa líder tenha um custo marginal de produção constante. Os lucros obtidos por ela para um preço qualquer p são $\pi(p) = (p - c)[D(p) - S(p)] = (p - c)R(p)$. Para obter o maior lucro possível a empresa líder procura estabelecer uma relação, onde o custo marginal seja igual a receita marginal. Porém, a receita a ser usada é a da curva de demanda residual. Assim, na figura podemos analisar que a curva de demanda é uma reta

Figura 11: Líder de Preços.



Fonte: Líder de Preços (VARIAN, H.R, 2000, p.519)

linear, o que acarretará na curva de recita marginal ligada a ela uma intersecção vertical, com uma inclinação duas vezes maior.

Por fim, podemos avaliar a liderança de preços sob um olhar mais algébrico. Dada a curva de demanda inversa igual a $D(p) = a - bp$. Nesse caso, a empresa seguidora terá uma função custo igual a $c_2(y_2) = \frac{y_2^2}{2}$, enquanto que a empresa líder tem como função custo $c_1(y_1) = cy_1$. Dado um preço p, a empresa seguidora irá realizar atividades de operação onde o custo seja ao preço. Assim, teremos $p = y_2$, o que resultará em $y_2 = S(p) = p$. A curva de demanda residual da empresa líder é $R(p) = D(p) - S(p) = a - bp - p = a - (b + 1)p$. A partir dessa situação a resolução torna-se uma atividade de monopólio. Isolando p em função de y_1, obtemos

$$p = \frac{a}{b+1} - \frac{1}{b+1} y_{1.}$$

Sendo, essa a função de demanda inversa da empresa líder**.** A curva de recita marginal possui a mesma intersecção com uma inclinação duas vezes maior. O que a caracteriza da seguinte forma

$$RM_1 = \frac{a}{b+1} - \frac{2}{b+1} y_1.$$

Igualando a receita e o custo marginal, temos

$$RM_1 = \frac{a}{b+1} - \frac{2}{b+1} y_1 = c = CM_1$$

Analisando a situação de produção para a obtenção de maximização de lucros da empresa líder, teremos

$$y_1^* = \frac{a - c(b+1)}{2}$$

que representa a produção da empresa 1 no equilíbrio.

3 UM MODELO ESTOCÁSTICO DE COOPERAÇÃO MISTA ENTRE AS EMPRESAS

Neste capítulo, será apresentado um modelo de agentes para estudar um mercado em que as empresas possuem estratégias dinâmicas e os consumidores um nível de informação dos preços dos produtos comercializados.

Para tais eventos serão levados em consideração os modelos de Liderança de Preços, Liderança de Quantidade e Modelo de Cartel. Assim, como as características que compõem cada um dos modelos.

Na parte de análise do Mercado foi desenvolvido via Matlab uma simulação própria de Monte Carlo. Assim, busca-se para compreender os resultados obtidos, bem como avaliar o efeito desses resultados no comportamento do mercado, tanto para o consumidor, quanto para as empresas.

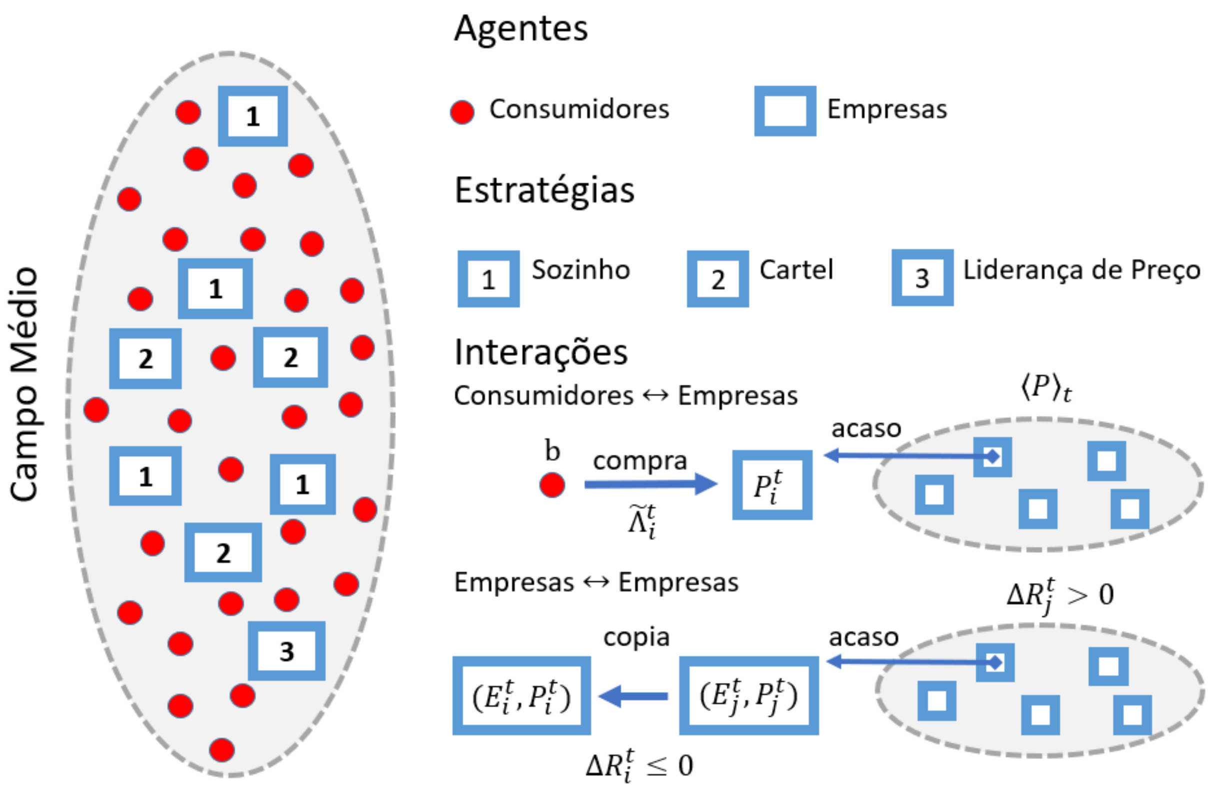
3.1 MODELO

A Figura 12 apresenta de forma esquemática o modelo de agente proposto. No que segue, passamos a descreve-lo. Em especial, trataremos dos agentes, das estratégias e das interações.

Supõe-se um sistema constituído por dois tipos de agentes: consumidores e empresas, de tal forma que M empresas e N consumidores estão distribuídos em campo médio (sem qualquer estrutura espacial). Neste mercado, se estabelece que todas as empresas vendem o mesmo produto e que possuem um estoque muito maior que a demanda. Neste sentido, todas as empresas irão concorrer com as mesmas condições. Além disso, a demanda por parte dos agentes compradores é irrelevante visto que o mercado será sempre abastecido pelas empresas que nele concorrem. Admitimos que uma firma i no tempo t, representa por F_i^t, é caracteriza por um vetor de estado que é função da estratégia E_i^t, quantidade de produtos vendidos Q_i^t e preço praticado P_i^t, ou seja, $F_i^t = (E_i^t, Q_i^t, P_i^t)$.

O preço da mercadoria ofertada por uma firma é limitado e assume valores reais positivos não nulos. Assim, tomamos os preços limitados no intervalo $P_{min} \leq P_i^t \leq P_{max}$ em que P_{min} e P_{max} são constantes (não nulas e distintas) associadas ao menor e maior preço do mercado, respectivamente. Esta restrição é importante visto que se aproxima de um mercado realista, ou seja, exclui as possibilidades da prática de valores nulos e preços “explosivos” (situação em que o preço máximo é muito maior ao preço de mercado, $P_{max} \gg \langle P \rangle$).

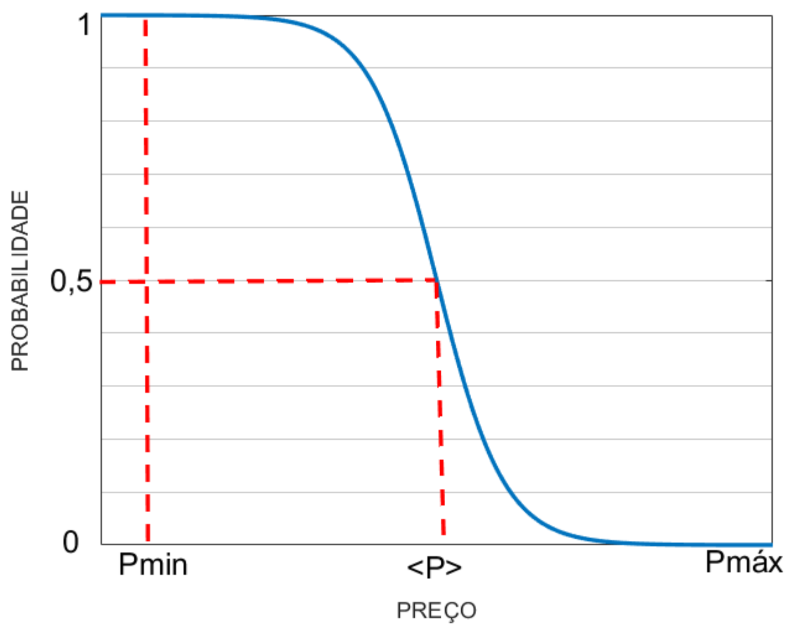
Figura 12: Representação do Modelo de Agentes



Fonte: Elaborado pelo autor.

No que se refere as estratégias, uma empresa pode cooperar ou não com as suas concorrentes. Na opção em que não coopera, a qual definimos como $E_i^t = 1$, ela define o seu preço e atua no mercado de forma solitária. Por outro lado, na hipótese de cooperação a firma pode seguir duas estratégias: cartel e liderança de preço. No caso de cartel, situação em que variável de estado assume $E_i^t = 2$, a empresa se associa a outras com o propósito de praticar o mesmo preço de venda. Nesta ocasião, atribuiremos as empresas que exercem o cartel a prática de um preço $c\%$ acima do preço médio do mercado, isto é, $E_\ell^t = 2 \rightarrow P_\ell^t = (1 + c/100)\langle P \rangle_t$ em que ℓ refere-se a todas as empresa que compõem o cartel e $\langle P \rangle_t$ é o preço médio do mercado no instante t. Já na estratégia liderança de preço, denotada por $E_i^t = 3$, as firmas tomam como opção reduzir o preço a um valor abaixo do praticado no mercado. Em especial, será assumido que empresas com esta estratégia praticam o menor preço do mercado, ou seja, $E_i^t = 3 \rightarrow P_i^t = P_{min}$.

Figura 13: Probabilidade de aquisição de um produto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A quantidade de produtos vendidos é um contador discreto que registra o consumo dos compradores. Em mais detalhes, atribuímos a esta variável um número inteiro positivo. Por exemplo, ao afirmamos que num dado instante a firma i vendeu a unidades ($\forall\ a\ \in\ \mathbb{Z}_+$), estamos assumindo $Q_i^t = a$.

Assumiremos que todas as empresas produzem bens a um mesmo custo, que é independentemente da quantidade demandada (custo fixo). Sobre esta hipótese, a otimização dos ganhos das firmas (lucro) equivale a maximização do faturamento bruto (receita).

Os consumidores deste mercado são indistinguíveis e não possuem memória das compras realizadas, ou seja, fazem compras em empresas escolhidas ao acaso. Esta suposição representa um sistema em que os agentes ignoram preferências e/ou tendências.

Ainda em relação à ação do comprador, considera-se que ele adquire um único bem por vez levando em consideração o seu nível de informação do mercado b, nível este que trata do grau de conhecimento do preço praticado pelas empresas. Em mais detalhes, reservamos $b = 0$ e $b = 1$ como as cotas inferior e superior deste parâmetro, nesta ordem. O primeiro ($b = 0$) destinamos aos desinformados e, o segundo, ($b = 1$) aos que possuem informação completa dos preços praticados no mercado. Perceba que os valores entre os limites estabelecidos, $0 < b < 1$, indicam uma compreensão parcial dos preços (tão alta quanto mais próximo da unidade e, por outro lado, tão baixa quanto mais próxima do valor nulo).

Considerando que as compras são um fenômeno estocástico (mesmo o consumidor bem informado pode optar por não adquirir o produto motivado por outros fatores externos), atribuímos a um consumidor com informação completa, $b = 1$, a probabilidade Λ_i^t de adquirir um produto da empresa i no tempo t. A fim de escolher uma probabilidade mais realista, é desejável optar por uma função probabilidade em que o agente tenha forte tendência a compra quando o preço praticado pela empresa se aproxima do preço mínimo do mercado. E, em contrapartida, que seja inclinado a negligenciar o artigo na situação em que empresa executa o preço máximo, veja Figura 13. Uma possível relação que possui as características indicadas é dada por

$$\Lambda_{\mathrm{i}}^t = \frac{1 - \tanh(P_i^t - \langle P \rangle_t)}{1 - \tanh(P_{min} - \langle P \rangle_t)}$$

em que P_i^t é o preço da mercadoria na firma i e $\langle P \rangle_t$ é o preço médio praticado pelas empresas, ambas as variáveis em função do tempo t. É possível demonstrar, baseada na última equação, que probabilidade $\widetilde{\Lambda}_i^t$ de adquirir um produto da empresa i no tempo t dependente dos preços e do nível de informação é dada por $\widetilde{\Lambda}_i^t = 1 - b(1 - \Lambda_{\mathrm{i}}^t)$. Note que de acordo com esta equação, um agente com baixo nível de informação ($b \cong 0$) tende a adquirir o produto ($\widetilde{\Lambda}_i^t \cong 1$), uma vez que desconhece os preços das mercadorias. Complementarmente, um consumidor com bom nível de informação ($b \cong 1$) releva os preços para decidir sobre a aquisição do bem ($\widetilde{\Lambda}_i^t \cong \Lambda_{\mathrm{i}}^t$).

Definido o comportamento dos agentes (empresas e consumidores), passamos a tratar da dinâmica do processo. Preliminarmente, supomos que todas as empresas iniciam as suas atividades simultaneamente num dado instante $t = 0$. que, em certo sentido, é equivalente a propor que as firmas inaugurem suas operações neste tempo. Deste pressuposto, afirma-se que as quantidades vendidas são nulas para todas as empresas em $t = 0$, isto é, $Q_i^0 = 0, \forall\, i$. Ademais, admite-se uma configuração inicial em que uma fração f_k da população das empresas ocupem a estratégia k ($k \in \{1\ (solitária), 2\ (cartel), 3\ (liderança\ de\ preço)\}$). Para que as três estratégias sejam distribuídas entre as firmas, é imposta a restrição $f_1 + f_2 + f_3 = 1$ com $f_1, f_2, f_3 \neq 0$. Ainda neste instante, é atribuído a cada empresa um preço P_i^0 para o produto comercializado entre os limites pré-estabelecidos do mercado, ou seja, $P_i^0 \in [P_{min}, P_{max}]$ em que P_i^0 é uma variável aleatória real (uniformemente distribuída).

A dinâmica entre os agentes $\forall\, t \neq 0$ é dado por interações em dois níveis: consumidor → empresa e empresa → empresa. Na primeira, cada consumidor elege ao acaso uma empresa e baseado no seu nível de informação b e probabilidade de aquisição Λ_i^t adquire um único produto. Na interação entre as empresas, cada firma avalia a diferença das receitas entre dois tempos consecutivos, $\Delta R_i^t = R_i^t - R_i^{t-1}$ em que $R_i^t = P_i^t Q_i^t$. Dependendo desta variação a empresa decide mudar ou não de estratégia. No caso em que há aumento de receita ($\Delta R_i^t > 0$), a empresa mantém sua estratégia e eleva o preço do seu produto em ρ %. Consequentemente, o preço do produto da firma entre dois instantes consecutivos é dado por $P_i^{t+1} = (1 + \rho/100)\, P_i^t$ e a estratégia mantida $E_i^{t+1} = E_i^t$. Na outra situação, que não há aumento da receita $\Delta R_i^t \leq 0$, a empresa decide alterar a sua estratégia. A mudança é realizada de tal forma que a empresa i com $\Delta R_i^t \leq 0$ copia, ao acaso, a estratégia e o preço de uma outra empresa j com $\Delta R_j^t > 0$. Nesta situação, temos as seguintes mudanças entre as variáveis de estado: $E_i^{t+1} = E_j^t$ e $P_i^{t+1} = P_j^t$.

Consideramos uma unidade de tempo (passo de Monte Carlo) a sucessão de eventos necessárias para que todos agentes interajam pelo menos uma vez. Ao término desta rodada todas as quantidades demandas pelos consumidores voltam a configuração inicial $Q_i^t = 0$. Desta maneira, associamos o passo de Monte Carlo ao fim de um período. No universo das empresas, pode tratar da quantidade de vendas produzida no período de horas, dias, semanas, etc. É pertinente acentuar que a atualização das estratégias ocorre de forma sequencial ao término deste tempo. Uma rodada de realizações (run) é completada quando as estratégias das empresas alcançam o estado assintótico (configuração final em que as estratégias não se alteram $E_i^t = E_i^\infty$). O estado final das estratégias configura a medida de interesse neste modelo. Para explorar esta medida em nível de tendência, fixos os parâmetros (b, P_{min} e P_{max}), foi avaliado o estado final médio quando implementamos Σ *runs*. Denominamos o conjunto Σ *runs* como uma simulação. Com efeito, s simulações são iguais $s \times \Sigma$ *runs.* Estas simulações tem um papel de destaque quando estamos interessados em avaliar a variabilidade no nível de tendência. O código apresentado no Anexo A configura a implementação deste modelo na linguagem do MatLab.

3.2 RESULTADOS

Para se avaliar o comportamento das estratégias praticada pelas empresas frente ao nível de informação dos consumidores supõe-se um sistema constituído de $M = 100$ empresas e $N = 10000$ consumidores. Admite-se que os preços mínimo e máximo de um produto, respectivamente, são $P_{min} = 13$ e $P_{max} = 17$ e que os parâmetros de atualização dos preços sejam iguais a um (1) porcento ($\rho = c = 1\%$) a cada passo de Monte Carlo. Adicionalmente, tomamos aleatoriamente quatros condições iniciais distintas enquanto a distribuição de estratégias das empresas:

(a) $f_1 = 0.33$ (33% das empresas exercem a estratégia sozinha), $f_2 = 0.33$ (33% das empresas exercem a estratégia de cartel) e $f_3 = 0.34$ (34% das empresas exercem a estratégia de liderança de preço).

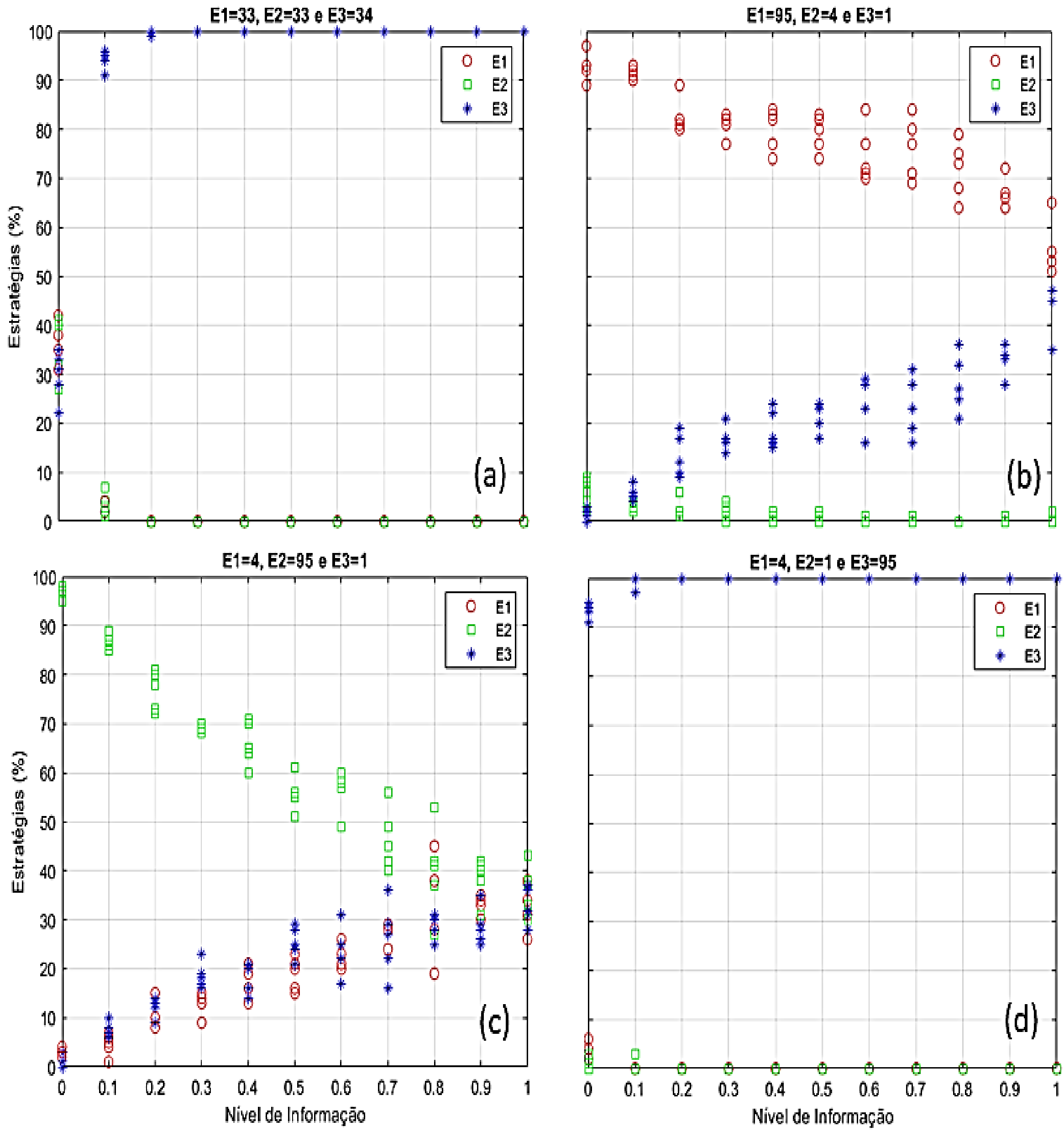
(b) $f_1 = 0.95$ (95% das empresas exercem a estratégia sozinha), $f_2 = 0.04$ (4% das empresas exercem a estratégia de cartel) e $f_3 = 0.01$ (1% das empresas exercem a estratégia de liderança de preço).

(c) $f_1 = 0.04$ (4% das empresas exercem a estratégia sozinha), $f_2 = 0.95$ (95% das empresas exercem a estratégia de cartel) e $f_3 = 0.01$ (1% das empresas exercem a estratégia de liderança de preço).

(d) $f_1 = 0.04$ (4% das empresas exercem a estratégia sozinha), $f_2 = 0.01$ (1% das empresas exercem a estratégia de cartel) e $f_3 = 0.95$ (95% das empresas exercem a estratégia de liderança de preço).

Na sequência, incrementamos o nível de informação em um décimo ($\Delta b = 0.1$) e avaliamos o estado final médio para um total de $\Sigma = 100$ *runs*. A fim de observar a variabilidade destes resultados desenvolvemos $s = 5$ simulações.

Figura 14: Estado final das estratégias em função do nível de informação. Os parâmetros $E1$, $E2$ e $E3$ referem-se ao número de empresa nas estratégias sozinha, cartel e liderança de preço, respectivamente, na configuração inicial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 14 exibe os resultados das simulações (cada símbolo representa uma simulação) para quatro mercados. Num panorama geral, perceba que um nível de informação nulo implica na configuração inicial. Este resultado não chega a ser surpreendente, dado que o consumidor desinformado sempre adquire o produto consumindo-o em estabelecimentos escolhidos ao acaso. Consequentemente, estas ações refletem num mercado que preserva as suas condições iniciais.

Estes diferentes cenários também sinalizam que a estratégia liderança de preço é a mais robusta (bem-sucedida) enquanto que a formação de cartel é a mais débil frente ao nível de informação dos consumidores. Em outras palavras, agentes desinformados são mais suscetíveis aos cartéis e os informados a uma situação em que poucas empresas detêm o controle da maior parcela do mercado (oligopólio).

Ainda, podemos destacar o papel da variabilidade (distribuição do símbolo ao longo da vertical) em função do tipo de estratégia emergente. Em mercados dominados pela liderança de preços a variabilidade é muito pequena, Figuras 14a e 14d. Em contrapartida, os sistemas governados pelas demais estratégias possuem uma variabilidade acentuada, Figuras 14b e 14c. Este achado revela que um sistema de empresas controladas pela estratégia de liderança de preço torna-se mais previsível do que quando governado por outras estratégias.

Na configuração inicial em que todas as estratégias estão (aproximadamente) igualmente distribuídas, Figura 14a, e dominadas por empresas que exercem a estratégia liderança de preço, Figura 14d, é notável a transição para a estratégia de liderança de preço com o incremento da informação. Perceba que mesmo um baixo nível de informação ($b = 0.1$) a fração de empresas que executam a estratégia liderança de preço é expressiva (superior a 90%), em ambos os cenários. Em verdade, nota-se que o aumento do nível de informação leva a extinção das estratégias sozinha e cartel. Esta situação é nociva ao mercado, uma vez que todas praticarão o menor preço de venda possível, isso irá acarretar nessas empresas um preço de custo e um preço de venda muito próximos. Assim, o lucro das pequenas empresas será muito pequeno levando, muitas delas, ao estado de falência (fechamento). Por outro lado, as grandes corporações podem manter esse preço de venda mínimo por algum tempo esperando que as pequenas empresas quebrem. Isso, irá levar a uma diminuição do mercado concorrente fazendo com que essas empresas possam elevar seus preços obtendo um lucro maior.

Ao analisarmos a Figura 14b pode-se verificar que mesmo 95% das empresas optando pela estratégia Sozinha, ao longo do aumento da informação b o número de empresa neste estado aproxima-se daquelas que exercem a estratégia liderança de preços. Tal situação deve-se ao fato que as empresas que não cooperam praticam preços iniciais que podem se tornar pouco atrativos ao mercado consumidor fazendo com que essas busquem uma adequação de preços próximos aos praticados no mercado. Tal fator leva E_1 a praticar preços próximos, ou iguais aos realizados pela Liderança de Preço, mas que ainda possam potencializar seus lucros. Neste cenário, a estratégia cartel é aniquilada e as duas outras estratégias coexistem.

Na figura 14c temos uma situação inicial em que 95% das empresas optam pelo estado E_2 (Cartel). Ao elevar o nível de informação, nota-se o decréscimo no número de empresas que praticam esta estratégia dominante e, por outro lado, o acréscimo no número de empresa que praticam as outras estratégias. Note que mesmo na suposição de consumidores bem informados ($b = 1$) as estratégias são distribuídas, praticamente, de forma uniforme. Num sentido mais amplo, diferente dos outros cenários, este exibe a coexistência das três estratégias para diferentes níveis de informação

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho foram modeladas situações de comportamento das empresas, sendo que cada empresa tem um estado que estimula o seu desempenho e, consequentemente, a prática de preço. Ora esses estímulos relacionam-se a um preço de venda qualquer, caso das empresas do parâmetro Sozinha (E1), ora apresentam preço controlados, afim de aumentarem seus lucros, caso das empresas do parâmetro Cartel (E2). Há ainda o caso da Liderança de preços, onde cada empresa procura um melhor preço de venda que aumente a sua lucratividade.

No estudo foram ainda levados em consideração o fator informação b do consumidor (ligado ao conhecimento dos preços cobrados pelas empresas). Esse fator se estendeu de zero ($b = 0$) a um ($b = 1$). O valor $b = 0$ indica um consumidor em informação e $b = 1$ uma situação em que o consumidor tem informações significativas sobre mercado. Nas simulações que foram realizados esse parâmetro variou em um intervalo de $0 < b < 1$, sempre com incrementos de 0.1. Buscamos assim, que ao longo do processo o consumidor pudesse aumentar seu grau de informação sobre os preços e opta-se pelo mais conveniente a seus interesses (pagar o menor preço).

Nas simulações propostas o mercado inicia com uma dada distribuição inicial para as estratégias entre as empresas e evolui no tempo de forma que uma empresa de acordo com seus ganhos opte entre manter ou trocar a sua estratégia, a fim de que pudesse se estabelecer no mercado e também aumentasse os seus lucros. Em particular, foram avaliados quatro cenários distintos.

No primeiro, as empresas optantes foram divididas igualmente na distribuição das estratégias. Ao analisarmos os resultados foi possível verificar que iniciado o incremento de b, rapidamente, os preços praticados pela Liderança de Preços se tornavam dominante. Esse fato gera resultados ruins as pequenas empresas que compõem esse cenário, uma vez que o seu preço de venda fica muito baixo quase igualando-se aos seus investimentos. Tal situação gerará a quebra financeira de várias dessas empresas, tornando o mercado restrito a empresas maiores que podem suportar tais situações. Assim, as grandes corporações poderão esperar uma calmaria do mercado para voltar a executar novos preço que potencializem os seus lucros (provavelmente muito acima do praticado anteriormente).

No segundo cenário, temos uma situação inicial dominada por empresas que optam pela estratégia sozinho. É possível verificar uma grande variabilidade no sistema, uma vez que as empresas alocadas no parâmetro E1 e E2 passam a repensar os seus preços de venda. Isso, nos mostra o efeito consumidor agindo, uma vez que ao adquirir informações sobre o preço de venda ele passa a buscar a melhor opção para si. Nesse caso, as empresas passam a reavaliar o mercado estabelecendo novos preços de consumo.

No terceiro cenário, tal qual ao segundo, apresenta na sua análise uma grande variabilidade no estado final. Ademais, é possível observar a coexistência das estratégias frente ao nível de informação. O que podemos perceber é um ajuste do mercado. O aumento da informação, por um lado, desfavorece a formação de cartéis e, por outro, favorece as estratégias sozinho e liderança de preço. Para os consumidores, tal situação se torna vantajosa, pois favorece uma maior variabilidade de preços de venda.

Por fim, o cenário quatro, em que a estratégia dominante no início da dinâmica é a liderança de preços. Das simulações observou-se uma rápida convergência do mercado a esta estratégia, que, em certo nível, é equivalente aos resultados do primeiro cenário.

Retomando a pergunta desta investigação,

Quais são os padrões de comportamento emergentes de um sistema de empresas interagentes frente ao nível de conhecimento dos preços pelos consumidores?

Dado o modelo proposto bem como os resultados apresentados, foi concluído que as estratégias que dominam o mercado são influenciadas pelo cenário (distribuição inicial de estratégias) bem como pelo nível de informação dos consumidores. Frente a variação do nível de informação, os cenários incialmente governados por organizações que utilizam as táticas sozinho e cartel tendem a gerar um padrão de coexistência das estratégias. No primeiro caso, sozinho, temos a coexistência de duas (sozinho e liderança de preço) e no segundo, cartel, a simultaneidade das três. No sentido contrário destes resultados, os cenários em que as estratégias são igualmente distribuídas ou dominadas pela liderança de preço apontam a extinção das táticas sozinho e cartel, ou seja, são dominados pela liderança de preço.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMENTEEMARAVILHOSA.COM.BR, c2019.Página Inicial: **<https://amenteemaravilhosa.com.br/a-verdadeira-historia-de-john-nash/>**. Acesso em: 08 de jun. 2019.

AROUND.COM, c2019.Página Inicial: **<https://around.com/glimpse-of-the-past/>** Acesso em: 08 de jun. 2019.

AXEROLD, R. **The complexity of Cooperation: Agents based models of competition and collaboration**, Princeton University Press, 1997.

BARRAT, L.; LEMY, M.B.; VESPIGNANI, V. **Dynamical Process on Complex Networks**. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

BIOGRAFIASYVIDAS.COM, c2019. Página Inicial. Disponível em**:< www.biografiasyvidas.com/biografia/z/zermelo.htm>**. Acesso em: 08 de jun. 2019.

BRANDIMARTE, P. **Handbook in Monte Carlo Simulation: Applications in Financial Engineering, Risk Management and Economics.** New York: Wiley, 2014.

BROWNLEE, J. Clever Algorithms: **Nature-Inspired Programming Recipes**. LuLu, 2017.

DESTINONEGOCIO.COM.BR, c2019. Página Inicial. Disponível em**:< https://destinonegocio.com/br/negocios-online/aprenda-como-identificar-e-lidar-com-os-concorrentes/>**. Acesso em: 08 de jun. 2019.

EPGE.FGV.BR, c2019. Página Inicial. Disponível em: **<https://epge.fgv.br/pt/professor/marilda-sotomayor>**. Acesso em: 08 de jun. 2019.

EPGE.FGV.BR, c2019. Página Inicial. Disponível em: **< https://epge.fgv.br/we/Graduacao/TEAMicroeconomia/2012?action=AttachFile&do=get&target=Teoria_dos_jogos.pdf>**, Acesso em: 09 de jun. 2019.

ESTRATEGIASDECISAO.COM, c2019. Página Inicial. Disponível em: **<http://estrategiasdedecisao.com/dilema-dos-prisioneiros/>**. Acesso em: 09 de jun. 2019.

FIANI, R. **Teoria dos jogos.** Rio de Janeiro: Editora Campus, 2015.

GROUPS,DCS.STAND.AC.UK, c2019. Página Inicial. Disponível em**:<** **http://wwwgroups.dcs.stand.ac.uk/~history/Biographies/Cournot.html>.** Acesso em: 08 de jun. 2019.

NOBELPRIZE.ORG, c2019. Página Inicial. Disponível em**:<** **https://www.nobelprize.org/prizes/economicsciences/1994/harsanyi/biographical/**>. Acesso em: 08 de jun. 2019.

NOBELPRIZE.ORG, c2019. Página Inicial. Disponível em**:<.** **https://www.nobelprize.org/prizes/economicsciences/1994/selten/biographical/>**. Acesso em: 08 de jun. 2019

MISES.ORG, c2019. Página Inicial. Disponível em: **<https://mises.org/profile/oskar-morgenstern-0>.** Acesso em: 08 de jun. 2019.

SOMATEMÁTICA, c2019. Página Inicial. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/biograf/vonneumann.php>. Acesso em: 08 de jun. 2019.

VARIAN, H.R. **Microeconomia: princípios básicos.** Rio de Janeiro Editora Campus, 2000.

ANEXO A

SIMULAÇÃO DE EMPRESAS-MATLAB

```
format long g
clear
clc

% -- Empresas e Consumidores --

M=100; % Número de Empresas
N=10000; % Número de Consumidores
b = 1; % Nível de informação dos consumidores (0<=b<=1)
temp=10000; % número de execuções (máximo)


pa=13; % Preço (menor)
pb=17; % Preço (maior)

pcusto=pa; % preço de custo
pmax=pb; % Preço máximo

rr=100; % número de simulações

% ------------------------------

for j=1:rr % rr simulações

disp(['Estado da Simulação [',num2str(j-1), '%]'])


%j % Imprime o número de execuções

% -- Configuração Inicial Empresas --

%E=randi([1 3],1,M); % Estratégia (1 -> Sozinho, 2 ->
Cartel, 3 -> Liderança de Preços)
E(1:0.33*M)=1;
E(0.33*M+1:0.06*M)=2;
E(0.03*M+1:M)=3;

P= pa+(pb-pa)*rand(1,M); % Preços (uniformemente
distribuidos pa<P<pb)

Q=zeros(1,M); % Quantidades (todos nulos)

R=zeros(1,M); % receitas (todos nulos)
```

```
    % Cartel
    EC=find(E==2); % Lista de empresas que participam do
cartel
    pcartel=1.01*mean(P); % Eleva o preço do grupo médio
em 1%

    if pcartel>pmax
        pcartel=pmax
    end

    for i=1:length(EC)
        P(EC(i))=pcartel;
    end

    % Liderança de Preço
    EL=find(E==3); % Lista de empresas que participam da
liderança de preços
    for i=1:length(EL)
        P(EL(i))=pcusto; % Reduz o preço praticado para o
mínimo
    end


    % ------------------------------------


    for t=1:temp

    % t % imprime o tempo

    % -- Passo de Monte Carlo ---

    % Compras

    Qj=Q; % Quantidades no tempo anterior
    Pj=P; % Preço no tempo anterior
    Q=zeros(1,M); % Quantidades (todos nulos)

    for i=1:N

    sel=randi([1 M]); % Empresa selecionada pelo consumidor

    pmed=mean(P); % Preço Médio
    dp=(1-tanh(P(sel)-pmed))/(1-tanh(pa-pmed));          %
Probabilidade de compra baseado na diferença de preço
```

```
    if rand()<1-b*(1-dp) % Compra do consumidor na empresa
sel
        Q(sel)=Q(sel)+1;
    end

    end

    % Estratégias

    Rj=Qj.*Pj; % Receita no tempo anterior
    R=Q.*P; % Receita no tempo atual
    DR=R-Rj; %Diferença de Receita
    RNC=find(DR<=0);  %  Empresas  em  que  a  receita  NÃO
aumentou
    RC=find(DR>0); % Empresas em que a receita aumentou


    % Empresas com aumento de receita
    for i=1:length(RC)
        pp=1.01*P(RC(i));

        if pp>pmax
        pp=pmax;
        end

        P(RC(i))=pp; % Eleva o preço em 1%

    end

    % Empresas com redução de receita
    for i=1:length(RNC)
        sel=randi([1 length(RC)]); % escolha arbitrária
        E(RNC(i))=E(RC(sel)); % Cópia a estratégia de forma
arbitraria de uma empresa que aumentou a receita
        P(RNC(i))=P(RC(sel));
    end

    %obs.: A empresa que escolhe a estratégia 1 pratica o
preço da empresa
    %selecionada
    %mercado

    % Cartel
    EC=find(E==2); % Lista de empresas que participam do
cartel
    pcartel=1.01*mean(P); % Eleva o preço do grupo médio
em 1%
```

```
    if pcartel>pmax
        pcartel=pmax;
    end

    for i=1:length(EC)
        P(EC(i))=pcartel;
    end

    % Liderança de Preço
    EL=find(E==3); % Lista de empresas que participam da
liderança de preços
    for i=1:length(EL)
        P(EL(i))=pcusto; % Reduz o preço praticado
    end

    %R=Q.*P; % Receita no tempo atual
    %din(t,4)=mean(R);

    esta1=sum(E==1);
    esta2=sum(E==2);
    esta3=sum(E==3);


    if (esta1/M==1 | esta2/M==1 | esta3/M==1) % caso alguma
estratégia atinja 100% FIM DA SIMULAÇÃO
        break
    end

    end

    dina(j,1)=esta1/M;
    dina(j,2)=esta2/M;
    dina(j,3)=esta3/M;
    dina(j,4)=mean(P);
    dina(j,5)=mean(Q);


    end

    disp('Estado da Simulação [100%]')
    disp('---------------------------')
    disp('Resultados:')

    Estado1=mean(dina(:,1))*100  % Percentual Final no
Estado 1 (sozinho)
    Estado2=mean(dina(:,2))*100  % Percentual Final no
Estado 2 (cartel)
```

```
    Estado3=mean(dina(:,3))*100  %  Percentual  Final  no
Estado 3 (Liderança de Preços)
    %PrecoMedio=mean(dina(:,4))  % Preço médio
    %QuantidadeMedia=mean(dina(:,5))  % Quantidade média
```