

UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS — UNISINOS
UNIDADE ACADÊMICA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS
NÍVEL MESTRADO

ROSSANO SANTOS NORONHA

PROJETO ECONÔMICO DA CARTA DE CONTROLE \bar{X}
Um modelo com custos dependentes dos desvios

SÃO LEOPOLDO
2017

Rossano Santos Noronha

PROJETO ECONÔMICO DA CARTA DE CONTROLE \bar{X}
Um modelo com custos dependentes dos desvios

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do grau de Mestre pelo
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de
Produção e Sistemas da Universidade do Vale
do Rio dos Sinos — UNISINOS

Orientador:
Prof. Dr. André L. Korzenowski

São Leopoldo
2017

N852p

Noronha, Rossano Santos

Projeto Econômico da Carta de Controle \bar{X} : um modelo com custos dependentes dos desvios / Rossano Santos Noronha — 2017.

65 f.: il.; 30 cm.

Dissertação (mestrado) — Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas, São Leopoldo, 2017.

“Orientador: Prof. Dr. André L. Korzenowski.”

1. Carta de controle \bar{X} . 2. Controle de qualidade. 3. Controle estatístico de processo. 4. Custos da qualidade. 5. Otimização de cartas de controle. 6. Projeto econômico. I. Título.

CDU 658.5

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)

(Bibliotecário responsável: Flávio Nunes — CRB 10/1298)

Aos nossos pais.

*If I have seen farther than others,
it is because I stood on the shoulders of giants.*
— SIR ISAAC NEWTON

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que de uma forma ou outra me apoiaram nesta longa e dura jornada!!!!

Em especial a minha mãe, Rosana Noronha, que foi uma das pessoas que sempre me apoiou e me deu forças para não desistir. Obrigado pelo amor incondicional!!!!

Ao meu pai que não está mais entre nós e não pode presenciar este momento, mas que de algum lugar está vendo. Saudades...

Ao meu irmão Daniel Noronha e minha namorada Maria Paula Azevedo que me deram forças... Obrigado pelo apoio sempre!!!!

Aos professores que estiveram presente nesta caminhada e em especial ao meu professor e orientador André Luis Korzenowski, que foi o grande responsável por este momento, sem ele me apoiando não teria alcançado estes resultados. Obrigado pela confiança!!

Aos colegas de curso, em especial a Ana Lucia Schenkel Herrera, Davenilcio Luiz de Souza e Wagner Lourenzi Simões parceiros nas horas boas e ruins!!!!

À CAPES pela bolsa de estudo.

A Deus!!!!!!

Obrigado!

RESUMO

Noronha, R. S. *Projeto Econômico da Carta de Controle \bar{X} : Um modelo com custos dependentes dos desvios*. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) – Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, RS, 2017.

Devido à dificuldade em se estimar os custos de operação associados ao monitoramento estatístico do processo nos trabalhos identificados na literatura, este trabalho tem por objetivo propor um modelo de otimização econômico para a carta de controle \bar{X} que considere as incertezas em relação aos custos variáveis e dependentes do desvio em relação à média do processo. O levantamento bibliográfico efetuado auxiliou no entendimento de como a incerteza em relação aos custos na utilização das cartas de controle são tratados. Percebeu-se o tratamento dos custos bem como do parâmetro de desvio do processo em relação a média δ como variáveis discretas e que impactavam na carta. A proposta aqui apresentada consiste em tratar não apenas o desvio em relação a média mas também dois dos custos associados à operação da carta de controle \bar{X} como variáveis aleatórias de distribuição contínua, inserindo assim um componente de incerteza na sua estimação. Desenvolveu-se assim uma nova formulação para o problema de otimização. Foram escolhidas instâncias para a otimização e comparados os resultados com os obtidos por autores da literatura. Os resultados foram obtidos por meio da metaheurística *simulated annealing*. Como resultados, o método mostrou-se eficiente, mostrando que o nível de dependência entre o parâmetro de mudança de processo e o custo e, da incerteza que se tem quanto aos valores definidos de custo de operação impactam nos custos totais de operação do CEP. A principal contribuição deste trabalho de pesquisa está na apresentação de uma formulação matemática de otimização da carta de controle \bar{X} que trata não somente o desvio em relação à média do processo mas também os custos de operação do CEP como variáveis aleatórias. A originalidade da formulação está em considerar os custos linearmente dependentes do tamanho do desvio do processo em relação a sua média.

Palavras-chave: Carta de controle \bar{X} . Controle de qualidade. Controle estatístico de processo. Custos da qualidade. Otimização de cartas de controle. Projeto econômico.

ABSTRACT

Noronha, R. S. *\bar{X} Control Chart Economic Design: a model with costs dependent on the deviations*. 2017. Dissertation (Master in Engineering of Production and Systems) – Vale do Rio dos Sinos University, São Leopoldo, RS, 2017.

Due to the difficulty in estimating the operating costs associated to the statistical monitoring of the process described in the literature, this paper aims to propose a model of economic optimization for the \bar{X} control chart that considers the uncertainties in relation to the variable costs and dependent on the deviation in relation to the average of the process. The literature review performed supported the understanding of how the uncertainty in relation to costs in the use of control charts is treated. The treatment of the costs as well as the parameter of deviation of the process in relation to the δ average were indicated as discrete variables and that impacted on the chart. The proposal presented here consists of treating not only the deviation from the mean but also two costs associated with the operation of the \bar{X} control chart as random variables of continuous distribution, thus inserting a component of uncertainty in its estimation. A new formulation for the optimization problem was developed. Instances for optimization were chosen and the results were compared with those obtained by authors described in the literature. The results were obtained through simulated annealing metaheuristics. As a result, the method proved to be efficient, showing that the level of dependence between the process change parameter and the cost, as well as the uncertainty regarding the defined operating cost values impact on the total cost of operation of the SPC. The main contribution of this research work is the presentation of a mathematical formulation of optimization of the \bar{X} control chart that treats not only the deviation in relation to the average of the process but also the operating costs of the SPC as random variables. The originality of the formulation is to consider costs linearly dependent on the size of the process deviation in relation to its mean.

Keywords: \bar{X} Control chart. Quality control. Statistical process control. Quality costs. Control chart optimization. Economic design.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1:	Causas atribuíveis e aleatórias da variabilidade	22
Figura 2:	Carta de controle clássica	22
Figura 3:	Etapas do método de trabalho	34
Figura 4:	Critério de ajuste de sintonia n_{lim}	39
Figura 5:	Parâmetro de sintonia de temperatura inicial	41
Figura 6:	Análise do custo esperado do modelo proposto	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Parâmetros de simulação de Duncan	28
Tabela 2:	Parâmetros de custo e de processo em diferentes cenários	31
Tabela 3:	Comparação de custos em função de n amostras	42
Tabela 4:	Comparação de algoritmos	43
Tabela 5:	Parâmetros de variação do gráfico de controle	51
Tabela 6:	Projetos da carta de controle com instâncias D1, D10, P3 e P4	51
Tabela 7:	Comparação instâncias D1, D10, P3 e P4	53
Tabela 8:	Instâncias com incerteza de custos e dependência variável	55

LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ARL	Average Run Length
ATS	Average Time to Signal
BIPM	Bureau Internacional de Pesos e Medidas
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP	Controle estatístico de processo
CIPM	Comitê Internacional de Pesos e Medidas
CUSUM	Cumulative sum control chart
EWMA	Exponentially weighted moving average
FSI	Fixed-sampling-interval
LC	Linha central
LIC	Limite superior de controle
LSC	Limite inferior de controle
MOGAESD	Multi-Objective Genetic Algorithm for Economic Statistical Design
VSI	Variable sampling interval

LISTA DE SÍMBOLOS

a_1	Componente fixa do custo de amostragem
a_2	Componente variável do custo de amostragem
a_3	Custo da determinação de uma causa atribuível
a_4	Custo de investigação de um alarme falso
a_5	Custo horário da penalidade associado à produção no estado fora de controle
n	Tamanho da amostra
h	Intervalo entre coletas
k	Amplitude do intervalo de controle
g	Tempo necessário para coleta da amostra e interpretação dos resultados
D	Tempo exigido para achar a causa atribuível subsequente a um sinal de ação
A	Variável aleatória com distribuição de probabilidade Beta
B	Função Beta
p	Parâmetro de forma da distribuição Beta
q	Parâmetro de escala da distribuição Beta
t	Tempo
$E(L)$	Perda horária esperada incorrida pelo processo
$TE(L)$	Perda total esperada incorrida pelo processo
α	Probabilidade do erro tipo I
β	Probabilidade do erro tipo II
$1 - \beta$	Probabilidade da causa atribuível ser detectada
τ	Tempo de ocorrência da causa atribuível entre amostras consecutivas
λ	Frequência esperada por hora de ocorrência de causas atribuíveis
δ	Parâmetro de deslocamento do processo
δ_1	Limite inferior do desvio em relação a média (parâmetro de deslocamento do processo)
δ_2	Limite superior do desvio em relação a média (parâmetro de deslocamento do processo)
σ	Desvio padrão
σ_{a_3}	Desvio padrão do custo a_3
σ_{a_5}	Desvio padrão do custo a_5
σ_δ	Variância do parâmetro de deslocamento do processo
σ^2	Variância
$\sigma_{a_3 \delta}^2$	Variância do custo a_3 condicionado ao tamanho do desvio

$\sigma_{a_5 \delta}^2$	Variância do custo a_5 condicionado ao tamanho do desvio
ρ_{a_3}	Correlação entre o delta e o a_3
ρ_{a_5}	Correlação entre o delta e o a_5
μ_0	Média da distribuição
μ_δ	Média do parâmetro de deslocamento do processo
$\mu_{a_3 \delta}$	Custo médio esperado de a_3 condicionado ao tamanho do desvio
$\mu_{a_5 \delta}$	Custo médio esperado de a_5 condicionado ao tamanho do desvio
η	Expectativa ponderada
ϕ	Densidade da distribuição normal padrão
$\Gamma(\cdot)$	Função gama

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Apresentação do Tema e Problema de Pesquisa	13
1.2	Questão de Pesquisa e Objetivos	17
1.3	Justificativa	18
1.4	Delimitações da Pesquisa	20
1.5	Estrutura do trabalho	20
2	REFERENCIAL TEÓRICO	21
2.1	Cartas de controle de processo	21
2.2	Otimização e design econômico de cartas de controle	23
2.2.1	Incerteza na estimação de custos e despesas	25
2.3	Modelos econômicos para Carta de Média (\bar{X})	27
2.3.1	Modelo econômico de Duncan (1956)	27
2.3.2	Modelo econômico de Vommi e Seetala (2007)	29
2.3.3	Modelo econômico de Vommi e Kasarapu (2014)	31
3	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	34
3.1	Caracterização da pesquisa e etapas do trabalho	34
3.2	Método de Otimização <i>Simulated Annealing</i>	35
3.3	Validação do Algoritmo <i>Simulated Annealing</i>	37
4	APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	44
4.1	Modelo econômico proposto	44
4.2	Instâncias para avaliação do modelo de otimização da carta \bar{X} proposto	51
4.3	Resultados da otimização	52
4.4	Validação do modelo	54
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do Tema e Problema de Pesquisa

Devido a uma grande preocupação com as questões de qualidade e variabilidade na produção de bens, o estatístico Walter Andrew Shewhart, criou na década de 1920 as cartas de controle, que viriam a ser o pilar fundamental do controle estatístico de processo (CEP). Shewhart (1926) elaborou duas hipóteses principais para avaliação de cartas de controle: as observações são independentes e o processo está sujeito a causas atribuíveis deslocando a média do processo do alvo pretendido, aumentando a variabilidade.

Este controle possibilitou uma padronização do sistema produtivo devido ao monitoramento do processo por estas ferramentas de controle. Estas cartas funcionam como um sinalizador e indicam quando o processo sofre ação de causas especiais de variação, saindo fora do estado de controle e possibilitando com isso que o processo seja analisado e corrigido. As cartas de controle tem por objetivo uma estratégia de monitoramento de padrões de qualidade com o menor custo e isso ocorre no momento em que se deixa de inspecionar 100% dos itens e passa-se a inspecionar por amostragem, reduzindo assim os custos associados a tempo de coleta, tamanho de amostra, registro de informações, custo de avaliação. A evolução dos sistemas de monitoramento da qualidade permitiu que fossem reduzidos os volumes de retrabalho e de perdas, levando à substancial redução nos custos de produção devidos a má qualidade. Com o passar do tempo, técnicas para detecção mais rápida, que lidam melhor com falhas de menor intensidade, foram desenvolvidas em busca de uma melhor gestão da qualidade dos processos (WOODALL; MONTGOMERY, 2014).

Existem dois tipos de cartas de controle, a primeira delas é a carta de controle para variáveis, que são cartas de controle para tendência central e variabilidade, utilizadas quando a característica de qualidade pode ser expressa como um número em alguma escala contínua de medida. Já a outra carta é denominada de carta de controle para atributos, e são utilizadas quando as características de qualidade são medidas em escala contínua ou quantitativa. A escolha correta dos parâmetros de controle são de grande importância para uma boa utilização das cartas, sendo eles: tamanho da amostra n , amplitude do intervalo de controle, em desvios padrão (k) e intervalo entre coletas, em horas (k). O que se espera das cartas é que mostrem evidências de que um processo está operando sob controle estatístico, detectem presença de causas especiais de variação e, monitorem e aprimorem o desempenho do processo de medição (WOODALL; MONTGOMERY, 2014).

Ainda nos dias atuais, as cartas de controle de Shewhart são utilizadas no controle do monitoramento de processos, sejam eles industriais ou não. Zhang, Nie e He (2014) e Chew et al. (2015) apresentaram novas proposições de cartas de controle para diferentes aspectos do processo industrial, utilizando intervalos variáveis de amostragem, tornando-se a utilização evidente para situações onde se tem alta taxa de rotatividade de trabalho, e a gestão pode

economizar recursos tais como tempo e custo na formação de novos empregados. Costa Quinino, Ho e Trindade (2014) demonstram uma abordagem para melhorar os limites da carta de controle \bar{X} quando os parâmetros do processo são estimados e a carta de controle está em operação, apresentando uma proposta para minimizar os efeitos das observações de curto prazo do número esperado de amostras até o primeiro ponto sinalizar uma condição fora de controle (ARL—*Average Run Length*) quando os limites de controle são aleatórios.

Note que a aplicação de ferramentas de monitoramento de processos exige a atenção a algumas características que, se não atendidas, podem gerar erros de decisão e, conseqüentemente, aumento dos custos de operação do monitoramento. As cartas de controle, apesar de serem muito utilizadas e trazerem benefícios diversos para o controle dos processos, apresentam dois tipos de erros associados às decisões que indicam: (i) o erro de não detectar uma mudança nos parâmetros do processo, e (ii) o erro em detectar alguma alteração que de fato não ocorreu. O segundo caso é geralmente relatado na literatura como um alarme falso (WOODALL, 1985; LORENZEN; VANCE, 1986; SANIGA, 2014).

Ainda no que diz respeito à utilização de cartas de controle, Franco et al. (2014) investigam o projeto econômico-estatístico das cartas de controle de Shewhart implementando estratégias de amostragem com a construção de subgrupos e monitorando processos autocorrelacionados. Percebem que o nível de autocorrelação influencia a seleção de estratégias de amostragem e propõem diferentes estratégias para coleta de amostras. Korzenowski et al. (2015) propuseram cartas para monitoramento de processos em ambientes de manufatura flexível. Os autores demonstram que implementar ferramentas de controle de qualidade em ambientes flexíveis e personalizados é possível. Os resultados demonstram a aplicação do CEP utilizando procedimentos baseados nos resíduos e em procedimentos de auto-inicialização, mesmo quando o tamanho do lote é igual a uma unidade.

A literatura pesquisada também apresenta aplicações de cartas de controle em ambientes que não os de produção industrial. Collins, Jibawi e McCulloch (2011) apresentam uma série de cartas que são mais comumente utilizadas como *Cumulative mortality plot*, *Variable life-adjusted display*, *CUSUM chart* e *Funnel plot*, por exemplo. Estas cartas são utilizadas para monitorar resultados adversos de intervenções cirúrgicas. Nordström et al. (2012) utilizam cartas para investigar os processos de verificação das unidades de monitores que têm sido adotados em várias instituições suecas para a verificação de pré-tratamento de tratamentos de radioterapia. Segundo Woodall e Montgomery (2014), o interesse em aplicações relacionadas com a saúde tem levado a um ressurgimento de pesquisas sobre monitoramento utilizando cartas de atributos. Isto porque os dados da contagem são inevitáveis nestas aplicações. Como exemplo, citam que tem havido uma quantidade de recentes trabalhos sobre aplicando uma taxa de Poisson quando a área de oportunidade varia ao longo do tempo. Tais aplicações são comuns porque o tamanho da população em risco em uma região ou instalação pode variar ao longo do tempo.

Quando se busca a definição ou escolha de uma carta para a implantação, o que se deseja é uma ferramenta que tenha a melhor performance possível, ou seja, que erre menos em ambos os

casos. Incorporar uma metodologia de otimização para a determinação dos parâmetros ótimos das cartas de controle, a fim de reduzir os custos de operação do CEP, tornar-se uma necessidade latente. Cortês (2001) classifica estes custos de operação do CEP em dois grandes grupos: (i) Custos de Controle e (ii) Custos da Falha. Os custos de controle são classificados em Custos de Prevenção e Custo da Avaliação enquanto que os custos da falha são classificados em Custos de Falhas Internas e de Falhas Externas.

Tendo em vista essa necessidade de otimização das cartas de controle, o primeiro autor a desenvolver um modelo econômico de gráficos de controle do tipo Shewhart foi Duncan (1956), no qual, ao se descobrir os parâmetros ótimos da carta, pode-se minimizar o tempo de operação e com isso reduzir os custos de operação do CEP. Muitos são os avanços na questão da otimização de cartas de controle desde que Duncan propôs o primeiro modelo. Na ocasião, o autor incorporou uma metodologia de otimização para a determinação dos parâmetros do gráfico de controle do tipo \bar{X} . Vários autores foram estimulados e uma grande quantidade de pesquisas subsequentes nesta área foram desenvolvidas, como por exemplo Magalhaes, Costa e Epprecht (2002), Yu et al. (2010), Mortarino (2010), Pan, Jin e Wang (2011) e Mohammadian e Amiri (2013).

Duncan utilizou como base para a elaboração de sua proposta o trabalho de Girshick e Rubin (1952), que utilizavam um critério de planejamento de maximização da receita líquida do processo por unidade de tempo. Duncan supôs que o processo caracteriza-se por um estado de controle centrado em um valor μ_0 e que, após a ocorrência aleatória de uma causa atribuível de magnitude δ , ocorre uma mudança da média do processo de μ_0 para $\mu_0 \pm \delta\sigma$. Ele então desenvolveu um modelo de otimização a partir de uma definição de tamanho médio da sequência (ARL—*Average Run Length*) e tempo até a ocorrência de um sinal (ATS—*Average Time to Signal*) que minimizassem os custos de operação do CEP. ARL e ATS são, respectivamente, o número esperado de amostras até que se sinalize algum ponto fora de controle e o tempo esperado para que se obtenha o primeiro ponto fora de controle. Basicamente, ele definia o tamanho da amostra n , intervalo de coleta h e o coeficiente de limites de controle k necessários para atender as condições necessárias de ARL e ATS definidos.

Relacionado com o projeto econômico, Michel e Fogliatto (2002) definem três tipos de custos associados ao controle de processos: i. Custos de amostragem e medição; ii. Custos de investigação e correção de causas especiais; e iii. Custos decorrentes da produção de itens não-conformes. Nos custos de amostragem estão inclusos salários dos responsáveis pela inspeção, custos dos testes de equipamentos e custo unitário dos itens amostrados. Já nos custos do bloco ii. estão inclusos aqueles relacionados à investigação de alarmes falsos e correção de causas especiais e, finalmente, no custos decorrentes de trabalho não-conforme estão os relacionados ao refugo ou retrabalho por falha interna, custos referentes a problemas de garantia ou falhas externas e custos indiretos por insatisfação dos clientes. Esta classificação não leva em consideração o custo de prevenção mencionado por Cortês (2001), agrupa os custos internos e externos no custo de produção de itens não conforme e o custo de avaliação é detalhado em dois grupos,

amostragem e medição e investigação e correção de causas especiais, de acordo com Michel e Fogliatto (2002).

Os custos associados ao monitoramento e que são devidos ao tamanho da amostra e despesas com funcionários nas tarefas de controle são relativamente fáceis de serem estimados. Porém, alguns custos são de avaliação mais complexa e, por consequência, de difícil mensuração. Custos associados à ocorrência de falsos alarmes podem gerar a parada da linha para investigação de uma alteração que não ocorreu no processo. Por outro lado, o aumento na produção de itens defeituosos em função da não detecção pela carta de que o processo saiu fora de controle (SAFAEI; KAZEMZADEH; GAN, 2015) gera custos tangíveis e intangíveis que são difíceis de serem mensurados de forma objetiva. Sabendo-se que o monitoramento da qualidade é considerado perda, pois trata-se de atividade que não agrega valor na produção, diversos autores estudaram alternativas para minimizar os custos ou aumentar os lucros na produção, apesar das perdas geradas pelo monitoramento estatístico da qualidade (MICHEL; FOGLIATTO, 2002). Entre eles, Alexander et al. (1995) desenvolveram um modelo que considera a perda devido à variabilidade do processo, perda esta que não é contabilizada no modelo de Duncan. Já Kasarapu e Vommi (2013) propuseram um modelo de otimização e o comparam com o modelo proposto por Panagos, Heikes e Montgomery (1985). No primeiro, presume-se que o processo não é parado durante a busca pela causa atribuível enquanto que no segundo, o processo é interrompido durante a busca pela causa atribuível. Encontraram parâmetros de custo menores em ambos os modelos, com uma leve vantagem para o modelo dois.

Preocupados em minimizar o custo total, Chou, Chen e Liu (2006) desenvolveram um projeto econômico para carta de controle VSI EWMA, aplicando a meta heurística algoritmo Genético, com a finalidade de encontrar valores ótimos para os parâmetros de funcionamento da carta. Também através da utilização do algoritmo genético, Faraz et al. (2010) propuseram a minimização do custo total esperado por hora com base no modelo de custo proposto por Lorenzen e Vance (1986). Aparisi, Luna e Epprecht (2010) desenvolveram um software para localizar os parâmetros ideais de um conjunto de gráficos de controle \bar{X} , empregando Algoritmos Genéticos, tendo como finalidade minimizar o ARL. Aparisi, García-Bustos e Epprecht (2014) desenvolveram um programa para otimizar um conjunto de cartas de controle univariadas de Poisson com o objetivo de selecionar os melhores limites de controle para cada gráfico, possibilitando a escolha do esquema mais adequado ao processo. Por fim, Ganguly e Patel (2012) propuseram a utilização do programa computacional MATLAB utilizando o modelo de simulação *Simulated Annealing* para minimizar os custos referentes às perdas.

Considerando outros trabalhos associados ao tema de otimização de cartas de controle, Michel e Fogliatto (2002) propõem uma otimização do modelo econômico para o projeto de cartas adaptativas do tipo \bar{X} , através da determinação dos melhores parâmetros a fim de minimizar os custos de operação da carta considerando também parâmetros estatísticos. No modelo, os autores utilizam um intervalo de amostragem adaptativo e tamanho de amostra fixo. Franco et al. (2014) investigam o desempenho econômico das cartas de controle \bar{X} de Shewhart nas

implementações de estratégias de amostragem propostas por Franco, Costa e Machado (2012) e Costa e Castagliola (2011) e concluem que o nível de autocorrelação influencia a seleção das estratégias alternativas de amostragem, demonstrando através de comparações numéricas que a estratégia de amostragem padrão nunca supera as estratégias de amostragem na presença de qualquer nível de autocorrelação. Também percebem que interação entre o nível de autocorrelação e o tamanho da mudança tem demonstrado ser uma influência para a seleção da estratégia de melhor desempenho. Vommi e Seetala (2007) apresentaram uma variação do modelo de Duncan considerando que o tamanho da variação do desvio do processo em relação a média impactava nos custos de investigação e nos custos de falha. Por outro lado, Bashiri et al. (2013) consideram a função de custo e as propriedades estatísticas (probabilidade de erro tipo I, poder do gráfico de controle e ATS) como objetivos e através disto propõem a utilização de um algoritmo genético (*Multi-Objective Genetic Algorithm for Economic Statistical Design – MO-GAESD*), para identificar as soluções ótimas nos projetos de uma carta de controle do tipo \bar{X} . Esta otimização caracteriza não mais um projeto simplesmente econômico de cartas de controle, mas sim um projeto estatístico.

Percebeu-se que no trabalho de Vommi e Seetala (2007) os custos e o parâmetro de mudança de processo (δ) eram tratados como variáveis discretas. Nele é proposta uma abordagem de design através da introdução de uma estatística simples, expectativa ponderada (η), para o problema de projeto econômico robusto de um processo com múltiplos cenários. Esta estatística tem a capacidade de considerar a frequência relativa dos cenários do processo avaliado para criar uma carta de controle robusta.

Já no trabalho de Vommi e Kasarapu (2014), os autores retomam o assunto tratando o parâmetro de mudança de processo (δ) como variável aleatória com distribuição de probabilidade dado pelo modelo contínuo Beta. Nesta nova proposta, os autores pretendem encontrar o melhor projeto de carta de controle, utilizando como premissa que a mudança de parâmetro de mudança de processo (δ) segue uma distribuição dentro de um intervalo contínuo de valores. A contribuição do presente estudo é testar a lógica inversa, uma vez que os custos são relevantes na implantação do CEP e os custos associados aos erros de decisão possuem incerteza quanto aos processos de decisão. Neste sentido, buscou-se tratar alguns componentes de custo como variáveis aleatórias, inserindo assim uma componente de incerteza na sua estimação e considerando δ como um valor fixo. A fim de aumentar a robustez do modelo, utilizou-se como base a proposição de Vommi e Seetala (2007), que adota a utilização do desvio δ discreto com custos variáveis.

1.2 Questão de Pesquisa e Objetivos

A partir da contextualização do problema ora apresentado, a questão de pesquisa pode ser enunciada como segue: “Como otimizar a carta de controle \bar{X} considerando custos variáveis e dependentes do desvio em relação à média do processo?”. Para responder a esta questão, o

objetivo principal desta dissertação é propor um modelo de otimização econômica para a carta de controle \bar{X} que considere as incertezas em relação aos custos variáveis e dependentes do desvio em relação à média do processo.

Os seguintes objetivos específicos devem ser alcançados para atender o objetivo geral desta dissertação:

- i. Identificar estratégias de otimização econômica de cartas de controle que apresentem componentes variáveis em sua formulação;
- ii. Selecionar os modelos de incerteza de medição associados aos custos de operação do CEP;
- e
- iii. Analisar como variações nos custos impactam na condição ótima de operação da carta de controle, seja pela alteração do custo ou pelo incremento da incerteza.

1.3 Justificativa

A função perda de custo esperado, apresentada por Vommi e Kasarapu (2014), e reproduzida no capítulo dois, considera apenas os intervalos de parâmetros de deslocamento e negligencia a variação do custo por hora de não se detectarem as mudanças. Existe uma variação no custo horário da penalidade associado à produção no estado fora de controle, uma vez que mudanças maiores tendem a produzir maiores valores deste custo.

Michel e Fogliatto (2002) apresentam três tipos de custos associados ao monitoramento da qualidade dos processos, custos de amostragem e medição; custos de investigação e correção de causas especiais; e, custos decorrentes da produção de itens não-conformes. Mais recentemente, Guo, Cheng e Lu (2014) desenvolveram um modelo onde associam quatro tipos de custos ao controle de qualidade do processo, sendo eles o custo de investigar alarmes falsos, o custo de amostragem e inspeção, o custo de encontrar e eliminar a causa atribuível, e o custo de não-conformidades produzidas quando o processo está operando sob controle e fora de controle.

Percebe-se que os dois autores concordam nos tipos de custos, monitoramento do processo, investigação e correção e custos com a produção de itens não conformes, a diferença é que Guo, Cheng e Lu (2014) consideram em seu modelo o monitoramento do custo referente a investigação de alarmes falsos, um quarto tipo de custo, enquanto que Michel e Fogliatto (2002) consideram este como parte do custo amostragem e inspeção. Entretanto, os dois autores destacam que os custos relacionados à investigação de alarmes falsos e correção de causas especiais são difíceis de serem mensurados e apresentam incerteza quanto aos valores aportados nos modelos econômicos apresentados, onde pequenas mudanças no processo são de difícil localização porém de fácil solução, enquanto que grandes mudanças são de fácil localização mas de difícil solução. Também observam que o custo esperado por unidade de tempo é reduzido principalmente quando se gasta menos tempo para detectar um sinal fora de controle. Contribuindo com esta discussão, Franco et al. (2014) demonstram quais processos e fatores de custo norteiam

a seleção da estratégia de amostragem enquanto Amiri, Moslemi e Doroudyan (2015) comentam que as incertezas nos parâmetros de custos são muito comuns na prática industrial. Desta forma, é relevante discutir o problema em identificar adequadamente os custos associados ao monitoramento estatístico do processo, principalmente no que tange aos custos associados aos erros de decisão.

Uma vez que os erros de decisão, dependendo do contexto de aplicação, podem ser severos, identificar adequadamente os custos associados aos elementos de decisão e buscar otimizar as cartas dentro destes contextos apresenta-se como uma questão relevante de pesquisa. Já que a prática de otimização de cartas de controle não está consolidada, há incertezas tanto em relação aos custos de operação quanto aos procedimentos para se executar o seu levantamento, e um modelo que auxilie na avaliação da viabilidade econômica do uso de cartas de controle de processos onde os custos possuem altos níveis de incerteza, vem contribuir para o atual estado-da-arte do monitoramento e controle da qualidade com a utilização das cartas de controle.

Quando o controle no processo está sendo executado, pode ocorrer de o processo sofrer um desvio e a carta não detectar, o que vai gerar um custo de operação do CEP com aumento de itens defeituosos não identificados pela carta. Isto vai acabar gerando aumento de custos de garantia e custos associados à percepção de qualidade do produto pelos clientes. Por outro lado, se a carta a todo momento sinaliza mudanças no processo que de fato não ocorreram, também se configura um erro e os custos associados a esses, como investigação, parada e avaliação do sistema para a identificação da causa desta falha, representam um tempo perdido e também geram custos. Então, estes custos também necessitam ser estimados para que se otimize a operação da carta, definindo tamanho de amostras n , intervalo entre coletas h e intervalos de confiança em termos do número k de desvios-padrão ótimos de modo a minimizar tanto os custos de operação em função das despesas de amostragem como dos custos associados aos erros nas tomadas de decisão. Entretanto, isto é difícil de ser estimado em função da falta de conhecimento dos engenheiros da qualidade sobre os custos de operação associados a estas atividades do CEP.

Como contribuição aplicada, será gerado um código algoritmo para implementação pela engenharia da empresa, para cálculo dos valores ótimos que irão gerar uma maior confiança na utilização do CEP com menor custo, tendo em vista que isto tende a controlar melhor os erros associados à operação do CEP com uma combinação de tamanho de amostra, intervalo entre coletas e amplitude do intervalo de controle que minimizam os custos de operação. Com isso, pretende-se obter redução de custos mediante a aplicação das cartas de controle, pois como se percebe em alguns movimentos da economia, esta redução faz com que as empresas sejam cada vez mais competitivas, e as principais correntes alegam que a competitividade está na redução das perdas e, entre elas, a redução dos custos de operação dos processos.

1.4 Delimitações da Pesquisa

Esta dissertação se restringe a identificar e avaliar os métodos existentes encontrados na literatura para estimar os custos de não detecção e alarmes falsos, avaliar a aplicabilidade das técnicas de estimação de custos e, como etapa final, a aplicação de um modelo de otimização para o design econômico de cartas de controle. Note que o trabalho propõe um enfoque puramente econômico e não estatístico. Apesar de saber que a otimização de cartas de controle tende a obter melhores resultados, não se garante que a solução ótima apresente o melhor design estatístico para a carta de controle. Isto se configura em uma outra abordagem de otimização de cartas de controle onde o design não só é econômico ou estatístico, mas os dois simultaneamente.

A pesquisa também restringe-se a levantamento bibliográfico, modelagem e simulação, de modo que não é esperado a realização da implementação dos achados da pesquisa em situações reais.

1.5 Estrutura do trabalho

O primeiro capítulo deste projeto, apresentou o contexto de pesquisa, objetivos, justificativa e delimitações do trabalho. O capítulo 2 apresenta os conceitos teóricos básicos necessários para o entendimento do assunto a ser tratado, abordando os conceitos básicos de cartas de controle de processo, apresenta as ideias principais a respeito de incertezas, de otimização e design econômico de cartas de controle, apresentando o modelo de carta \bar{X} proposto por Duncan (1956) e os modelos de otimização econômica de Vommi e Seetala (2007) e Vommi e Kasarapu (2014). O capítulo 3, por sua vez, apresenta os aspectos metodológicos, tais como a classificação da pesquisa e as etapas do desenvolvimento do trabalho, e por fim apresenta o método de otimização *Simulated Annealing* e sua validação. O Capítulo 4 apresenta a abordagem proposta para este projeto, os resultados encontrados e a discussão dos mesmos. A este, segue o capítulo final que apresenta as considerações finais e sugestões de pesquisas futuras.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Devido a uma necessidade cada vez maior de produtos com mais qualidade, um rígido controle de processos torna-se necessário. Qualidade esta que deve ser controlada durante todo o processo produtivo e não somente atrelada ao produto final. A maximização dos recursos produtivos torna-se essencial para a sobrevivência das empresas. Montgomery e Farias (2009) comentam que o controle dos processos, através das cartas de controle torna-se extremamente importante para a melhoria da qualidade do produto final e dos processos.

2.1 Cartas de controle de processo

Em processos de produção, sempre existirá uma variabilidades inerente ou natural, mesmo que estes sejam muito bem planejados ou controlados. Esta variabilidade é chamada de variabilidade natural ou "ruído de fundo", sendo a soma de muitas pequenas causas, essencialmente inevitáveis (MONTGOMERY; FARIAS, 2009). Diz-se que o processo está sob controle estatístico quando opera apenas com estas causas comuns ou aleatórias da variação. Porém, outros tipos de variabilidade podem estar presentes no processo. Normalmente, surgem de problemas com ajustes de equipamento, erros operacionais ou problemas com matéria-prima (OLIVEIRA et al., 2013). Geralmente, esta variabilidade é muito maior que a variabilidade natural do processo. Estas fontes de variabilidade que não são consideradas como aleatórias, são chamadas de causas atribuíveis. Na presença delas, o processo estará fora de controle estatístico (MONTGOMERY; FARIAS, 2009).

A Figura 1 apresenta as causas de variabilidade aleatórias e atribuíveis, onde o processo encontra-se sob controle até o instante t_1 , apresentando somente causas de variação aleatórias. Nesta parte do tempo, o processo apresenta média μ_0 e desvio padrão σ_0 . Com a ocorrência de uma causa atribuível após o instante t_1 , a média é deslocada para um novo valor ($\mu_1 > \mu_0$). Observa-se a ocorrência de outra causa atribuível após t_2 , onde $\mu = \mu_0$, porém com desvio padrão $\sigma_1 > \sigma_0$. Já após o instante t_3 outra causa atribuível ocorre resultando em média e desvio padrão distintos do histórico do processo (tempo anterior ao instante t_1).

O que se deseja com a implantação das cartas de controle é que as causas atribuíveis de mudanças do processo sejam detectadas o mais rapidamente possível. As cartas de controle são utilizadas com este propósito. A utilização de cartas de controle de processo tem como início, os anos 1920, sendo desenvolvidas pelo Dr. Walter Andrew Shewhart, do *Bell Telephone Laboratories*. Estas cartas são consideradas como o embrião do controle estatístico da qualidade (MONTGOMERY; FARIAS, 2009).

As cartas de controle estatístico são ferramentas de monitoramento do desempenho de processos de manufatura. Essas cartas utilizam como dados de entrada medições de variáveis que influenciam na qualidade dos itens manufaturados, como, por exemplo, espessura, diâmetro, largura, densidade, etc. As medições são realizadas em pontos espaçados no tempo e registradas

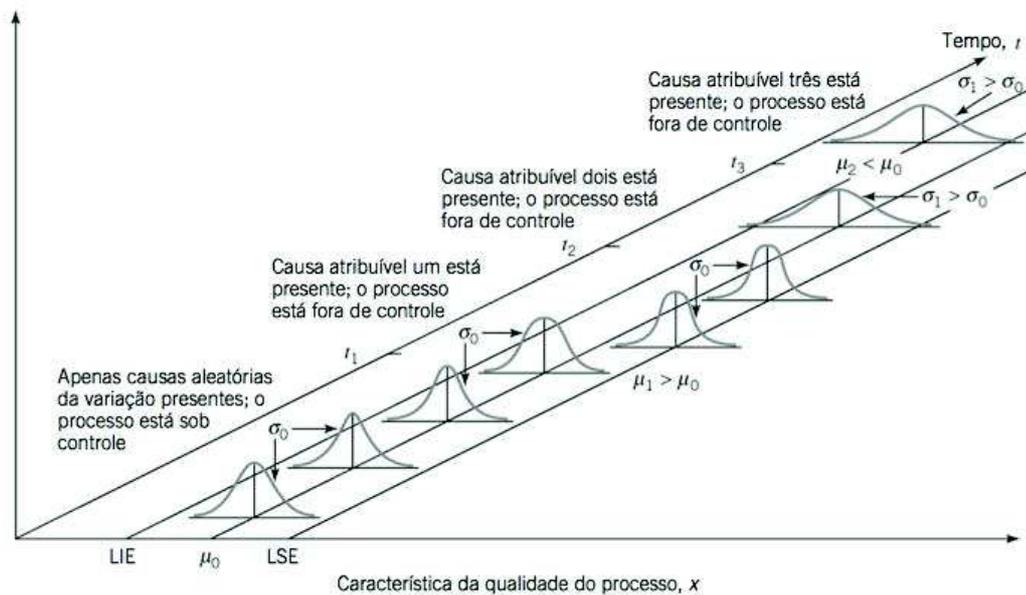


Figura 1: Causas atribuíveis e aleatórias da variabilidade

Fonte: Montgomery e Farias (2009)

nas cartas, resultando em gráficos temporais que apresentam os valores de medição da variável no eixo vertical e os pontos no tempo nos quais as medições foram efetuadas no eixo horizontal. A cada medição, compara-se o resultado obtido com os limites de controle (MICHEL, 2001).

A Figura 2 apresenta uma carta de controle com os elementos clássicos, onde uma característica de qualidade é medida por uma amostra contra o número da amostra ou tempo.

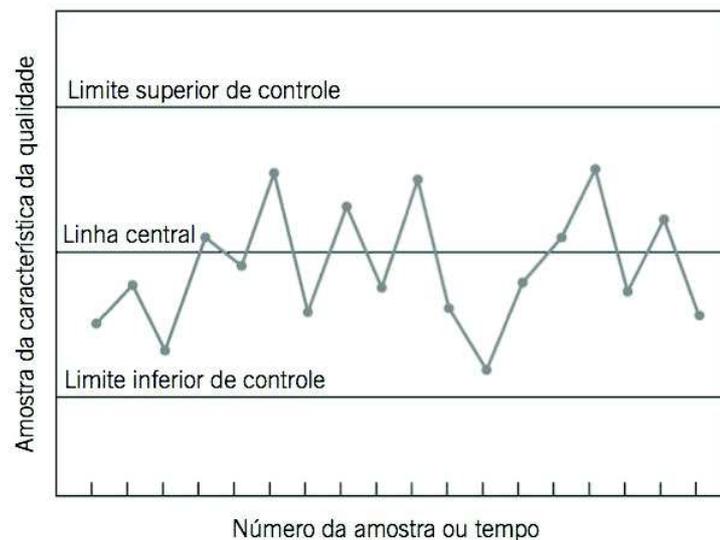


Figura 2: Carta de controle clássica

Fonte: Montgomery e Farias (2009)

O valor médio da estatística associada à característica de qualidade monitorada pela carta é representado por uma linha central (LC), indicando o nível do processo sob controle. A carta

apresenta ainda duas outras linhas, que são os limites superior de controle (**LSC**) e inferior de controle (**LIC**), estando o processo sob controle, espera-se todos os pontos entre estes limites. A ocorrência de um ponto além dos limites sem que diferenças no processo tenham de fato ocorrido representa um alarme falso. As cartas de controle são construídas de modo que a ocorrência de alarmes falsos sejam eventos raros. A partir do momento em que um ponto seja observado fora dos limites de controle, deve-se efetuar uma investigação e, se necessário, uma ação corretiva para que se encontre e elimine a causa atribuível que ocasionou este comportamento.

Para a implantação das cartas de controle, são consideradas duas fases. Na fase I, as cartas de controle são usadas para testar a posteriori se o processo estava sob controle, quando as primeiras observações foram feitas. Esta fase é utilizada para identificar o processo em um estado de controle e só se encerra quando obtém-se uma amostra de processo estável sob o ponto de vista estatístico. Nesta fase ainda, pode ser obtida uma grande quantidade de conhecimento sobre as características do processo. Já na fase II, mediante as informações e estimativas obtidas na fase I, as cartas de controle são utilizadas para testar se o processo permanece sob controle quando observações futuras são coletadas (SMETI et al., 2007).

Shewhart (1926), define dois tipos de modelos de cartas de controle: um para medições em escala contínua de valores e outro para medições em unidades de produtos. Cartas de controle para variáveis são utilizadas quando a característica da qualidade é medida em uma escala contínua de valores ou numérica (tamanho, largura, temperatura, volume). As cartas mais utilizadas para controle da média e variabilidade são as do tipo \bar{X} e R . A variabilidade pode ainda ser monitorada através da carta de controle para o desvio padrão, chamado de carta S , que utiliza como parâmetro de controle o desvio padrão amostral (MONTGOMERY; FARIAS, 2009).

Já as cartas de controle para medições em unidades de produtos são chamadas de cartas de atributos e monitoram características do produto como conforme ou não-defeituoso e não-conforme ou defeituoso. As três principais cartas para atributos são: carta p (monitora a fração de itens não-conformes ou defeituosos), carta c (número de defeituosos ou não-conformidades observadas) e a carta u (número de não-conformidades por unidade) (MONTGOMERY; FARIAS, 2009).

As cartas de atributos não são tão informativas como as cartas de variáveis. Porém as cartas por atributos são de grande importância para utilização em casos onde características de qualidade não são facilmente mensuráveis em escalas numéricas, normalmente úteis em indústrias de serviços e na melhoria da qualidade em ambientes que não o da indústria de transformação.

2.2 Otimização e design econômico de cartas de controle

Saniga (2014) apresenta que os custos associados ao monitoramento de processos são basicamente quatro: i) o custo de investigar alarmes falsos, ii) o custo de amostragem e inspeção, iii) o custo de encontrar e eliminar a causa atribuível, e iv) o custo de produção de

não-conformidades quando o processo está operando em controle e fora de controle. Autores propõem a utilização de cartas de controle para monitoramento e controle dos processos quando estes custos não são conhecidos com precisão (PIGNATIELLO JR; TSAI, 1988). Keats et al. (1997) consideram a estimativa dos custos muito importante para a obtenção de soluções aceitáveis e também demonstram a necessidade de procedimentos de projetos robustos para cartas de controle de tal forma que a função custo econômica seja minimizada, considerando a incerteza dos parâmetros do processo.

Duncan (1956) foi o primeiro autor a utilizar um modelo econômico para o planejamento ótimo de cartas de controle do tipo Shewhart. Também foi o primeiro a aplicar uma metodologia de otimização para a determinação dos parâmetros de cartas de controle do tipo \bar{X} . Para a elaboração do modelo, se baseou no trabalho de Girshick e Rubin, de 1952, que utilizavam um critério de planejamento de maximização da receita líquida do processo por unidade de tempo. Em seu modelo, Duncan admite que o processo caracteriza-se por um estado de controle μ_0 , onde após a ocorrência aleatória de uma causa atribuível de magnitude δ , ocorre uma mudança da média de μ_0 para $\mu_0 + \delta\sigma$ ou $\mu_0 - \delta\sigma$ (MONTGOMERY; FARIAS, 2009).

O monitoramento do processo ocorre através de uma carta \bar{X} com linha central em μ_0 e limites de controle superior $\mu_0 + k(\sigma/\sqrt{n})$ e inferior $\mu_0 - k(\sigma/\sqrt{n})$. A coleta de amostras deve ser feita em intervalos de h horas (fração ou inteiro) e as buscas pela causa atribuível iniciam somente quando um ponto ultrapassa os limites de controle, sendo que o processo pode ser ou não parado durante a busca por causas atribuíveis. Ainda, custos de ajustes ou reparos não são considerados. Os parâmetros μ_0 , δ e σ supõem-se que são conhecidos e n tamanho da amostra, k amplitude do intervalo de controle (em desvios padrão) e h intervalo entre coletas (em horas) devem ser determinados de modo a minimizar os custos de operação da carta de controle (MONTGOMERY; FARIAS, 2009).

Uma crítica ao planejamento econômico de cartas de controle de minimização do custo total esperado é feita por Woodall (1985). Em seus estudos, o autor mostra que o modelo econômico ótimo é muito sensível a mudanças da média, quando o processo sai fora de controle. Além disso, os modelos econômicos consideram que o custo total de alarmes falsos é proporcional ao número de alarmes falsos, o que pode conduzir a um número muito baixo de ARL uma vez que o custo não leva em conta o fato de que introduzir uma variabilidade adicional ao processo pode produzir um número excessivo de alarmes falsos e, com isso, destruir a confiança no controle do processo.

Em relação à otimização, Pedregal (2006) a define como a busca pela minimização ou maximização da função objetivo, sujeita a restrições diversas das variáveis. Com a otimização, deseja-se obter o menor ou maior valor possível como resultado da função objetivo sem que sejam violadas as restrições. Por meio de um planejamento econômico, pode-se definir a magnitude dos parâmetros de controle com a finalidade da otimização do controle do processo. Diversos estudos relacionados à otimização de cartas de controle foram propostos, entre eles pode-se citar Dal Cortivo, Neto e Chaves (2010) que desenvolvem o modelo de Planejamento

econômico de Baker para carta de controle \bar{X} utilizando a função de perda Taguchi e combinam o modelo A de Baker com a função perda de Taguchi no planejamento econômico. Como resultados, percebem que esta combinação apresenta uma inovação para o planejamento econômico, pois considera não apenas as perdas com o processo fora de controle mas também as perdas quando a média é desviada do valor nominal. Após simulações, perceberam que ocorreu um aumento no custo de amostragem com o aumento da amostra e que os limites de controle $\pm 3\sigma$ nem sempre são a melhor escolha.

Nesta linha, Wu, Shamsuzzaman e Pan (2004) desenvolveram um algoritmo para a otimização de cartas de controle com base na distribuição de probabilidade das mudanças de processos aleatórios, com o objetivo de minimizar a média global da função de perda de Taguchi em casos fora de controle, ajustando o tamanho da amostra, intervalo de amostragem e os limites de controle da carta de uma forma completa. Conseguiram resultados significativamente superiores aos da carta de controle de Shewhart em vista do desempenho global. Também demonstraram que as ideias gerais podem ser facilmente modificadas e aplicadas em projetos de outros tipos de cartas de controle como CUSUM e EWMA. Amiri, Moslemi e Doroudyan (2015) desenvolveram um cenário baseado no projeto econômico e econômico-estatístico robusto de carta de controle com média móvel exponencialmente ponderada para dar conta de critérios econômicos e estatísticos. Os modelos de otimização são resolvidos através da utilização do algoritmo genético. A idéia principal é projetar cartas de controle EWMA robustas, e para ter estes parâmetros econômicos robustos envolvem-se importantes parâmetros de custo não fixos nos diferentes cenários.

Yu e Hou (2006) apresentaram um modelo econômico para a carta de controle *variable-sampling-interval* (VSI) com múltiplas causas atribuíveis, utilizando como base as teorias estocástica e estatística e determinaram os parâmetros (n, h, k) de projeto ótimos da carta de controle, levando em consideração os custos associados à operação da carta. Como resultado, perceberam que o VSI tem um resultado mais eficaz que a carta de controle *fixed-sampling-interval* (FSI), devido a uma frequência mais alta na taxa de amostragem.

2.2.1 Incerteza na estimação de custos e despesas

Em 1977, reconhecendo a falta de consenso internacional sobre a expressão da incerteza de medição, o Comitê Internacional de Pesos e Medidas (CIPM), solicitou ao Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM) que resolvesse o problema em conjunto com laboratórios de normalização. Em diversas aplicações industriais e comerciais, bem como nas áreas da saúde e da segurança, muitas vezes é necessário proporcionar um intervalo para o resultado da medição que pode englobar uma distribuição de valores referentes a esta medição. Assim, o método ideal para avaliar e expressar a incerteza de medição deve ser capaz de proporcionar facilmente um intervalo tal, com uma probabilidade de cobertura ou um nível de confiança, que corresponda de uma forma realista com o que é exigido (BIPM; IFCC; IUPAC, 1995).

Algumas deficiências são abordadas por Lorenzen e Vance (1986) quanto ao uso dos modelos econômicos. Seus principais argumentos estão relacionados às dificuldades nos cálculos, intervalos de tempo inábil entre amostras e principalmente nas dificuldades em se determinar os custos de operação da carta de controle anteriormente citados, envolvidos nos processos. Pignatiello Jr e Tsai (1988) mostram que os parâmetros econômicos e de processos são difíceis de serem estimados. Estimar estes parâmetros ainda é agravado pelo fato de que ambientes de produção são frequentemente dinâmicos. O que ocorre é que normalmente nos planejamentos econômicos, se assumem valores fixos para estes parâmetros, quando na verdade eles deveriam assumir uma variedade de valores possíveis (LINDERMAN; CHOO, 2002).

Vommi e Kasarapu (2014) comentam que os modelos econômicos implicam na utilização do parâmetro de mudança de processo adequado para a obtenção de melhores resultados. Uma vez que uma causa atribuível nem sempre produz uma única mudança, as mudanças do processo podem ser consideradas de três maneiras: *i*) diferentes valores discretos conhecidos de deslocamentos, *ii*) uma possível gama de valores de deslocamento com distribuição desconhecida e *iii*) uma conhecida ou suposta distribuição dos valores de deslocamento. Com isso, através da utilização de parâmetro de mudança do processo adequado pode-se obter melhores resultados nos modelos econômicos.

Chang e Peng (1972) já demonstravam essa preocupação, onde desenvolveram um método teórico de um controle de custos garantido, onde tem-se grande incerteza sobre estes parâmetros, demonstrando que este método pode ser incorporado a um sistema adaptativo. Neste método, as incertezas dos parâmetros do sistema são reduzidas por meio de medições *on-line* e de avaliação ou por meio do conhecimento prévio sobre a dependência de um certo parâmetro em situações de facilidade de medição.

Quando se quer projetar cartas de controle baseado em um modelo de custo do processo, deve-se saber que algumas dificuldades relacionadas às incertezas podem estar presentes. Um modelo de custos primeiro deve ser construído de modo a refletir todos os custos relevantes, com a maior precisão possível. É preciso lidar com os conflitos entre a construção de um modelo muito complicado e detalhado que reflete com precisão o processo em estudo e um modelo que é uma aproximação grosseira, porém simples de usar. Um problema que é comum a todos os modelos de custos é que eles exigem valores de parâmetros que, muito frequentemente, não estão disponíveis ou são difíceis de estimar (PIGNATIELLO JR; TSAI, 1988).

Amiri, Moghaddam e Aghababae (2015) comentam que em caso de incerteza, ou seja, quando não são conhecidos os parâmetros de processo, os custos de cartas de controle podem ser tratados por projetos robustos. Neste caso, estimar os parâmetros de custo é muito importante para se obter a solução ideal na otimização da carta. Estes valores dos parâmetros de processo devem ser estimados com diferentes graus de precisão.

Portanto, percebe-se que a incerteza em relação aos parâmetros da carta de controle, principalmente ao que tange aos parâmetros de custo, tem grande importância quando da implementação de modelos econômicos, pois esta incerteza pode fazer com que não se consiga chegar ao

resultado ótimo ou nem muito próximo dele.

2.3 Modelos econômicos para Carta de Média (\bar{X})

2.3.1 Modelo econômico de Duncan (1956)

Duncan (1956) foi o primeiro a trabalhar com um modelo econômico de cartas de controle do tipo Shewhart e também a incorporar uma metodologia de otimização para a determinação dos parâmetros de cartas de controle do tipo \bar{X} . Através desta proposição de modelo econômico para o planejamento econômico ótimo, seu artigo foi estímulo para uma grande quantidade de pesquisas subsequentes nesta área como por exemplo Magalhaes, Costa e Epprecht (2002), Mortarino (2010), Pan, Jin e Wang (2011) e Mohammadian e Amiri (2013)

As amostras devem ser extraídas em intervalos de h horas e, somente quando um ponto ultrapassa os limites de controle, é que se iniciam as buscas pela causa atribuível, sendo que o processo não é parado durante a busca. Posteriormente, estudos como o de Panagos, Heikes e Montgomery (1985) modelaram o sistema com parada tão logo uma causa atribuível seja sinalizada.

No modelo de Duncan (1956), não se consideram os custos de ajustes ou reparos desta busca da renda líquida do processo. Os parâmetros μ_0 , δ e σ supõem-se que são conhecidos e n tamanho da amostra, k amplitude do intervalo de controle (em desvios padrão) e h intervalo entre coletas (em horas) devem ser determinados de modo a minimizar os custos de operação da carta de controle, custos de investigação das causas atribuíveis e eventuais custos associados a não detecção de anomalias no processo.

O tempo esperado de ocorrência da causa atribuível (τ) pode ser definido conforme Equação (2.1)

$$\tau = \frac{\int_{nh}^{(n+1)h} e^{-\lambda t} \lambda (t - nh) dt}{\int_{nh}^{(n+1)h} e^{-\lambda t} \lambda dt} = \frac{1 - (1 + \lambda h)e^{-\lambda h}}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})}, \quad (2.1)$$

onde λ é a frequência esperada por hora de ocorrência de causas atribuíveis. A probabilidade da causa atribuível ser detectada, quando ocorre, é determinada pela Equação (2.2)

$$1 - \beta = \int_{-\infty}^{-k - \delta\sqrt{n}} \phi(z) dz + \int_{k - \delta\sqrt{n}}^{\infty} \phi(z) dz, \quad (2.2)$$

onde $1 - \beta$ é o poder do teste, β é a probabilidade de erro tipo II e $\phi(z)$ é a densidade normal padrão, definida por

$$\phi(z) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-z^2/2),$$

e a probabilidade de um alarme falso (erro tipo I) é obtida pela Equação (2.3)

$$\alpha = 2 \int_k^{\infty} \phi(z) dz. \quad (2.3)$$

Com base nas equações supra citadas, Duncan (1956) define a função objetivo com três variáveis de decisão (n , k e h). A Equação (2.4) apresenta a função a ser otimizada.

$$E(L) = \frac{a_1 + a_2n}{h} + \frac{a_5[h/(1 - \beta) - \tau + gn + D] + a_3 + a_4\alpha e^{-\lambda h}/(1 - e^{-\lambda h})}{1/\lambda + h/(1 - \beta) - \tau + gn + D}, \quad (2.4)$$

onde

a_1 = componente fixa do custo de amostragem;

a_2 = componente variável do custo de amostragem;

a_3 = custo da determinação de uma causa atribuível;

a_4 = custo de investigação de um alarme falso;

a_5 = custo horário da penalidade associado à produção no estado fora de controle;

g = tempo necessário para coleta da amostra e interpretação dos resultados;

D = tempo exigido para achar a causa atribuível subsequente a um sinal de ação;

$E(L)$ = perda horária esperada incorrida pelo processo.

Nos seus estudos, entre outros, Duncan (1956) assume os valores apresentados na Tabela 1 e obteve como resultados ótimos $n = 5$, $h = 1.4$ e $k = 3.1$.

Tabela 1: Parâmetros de simulação de Duncan

Parâmetros	
a_1	50
a_2	0.10
a_3	25
a_4	50
a_5	100
α	0.0124
λ	0.01
δ	2.0
g	0.05
D	2.0

Fonte: Adaptado de Duncan (1956)

Após simulações, percebe-se que o procedimento de otimização funciona muito bem com valores variações para valores altos de D (tempo exigido para achar a causa atribuível subsequente a um sinal de ação). Por meio da mudança do parâmetro D para 20, os resultados obtidos para n , h e k , respectivamente são 6, 1.8 e 3.2, não muito diferentes quando $D = 2$. Como resultados, para $D = 20$ e $D = 2$, a perda de custos, para 100 horas foram: \$1,838.96 e \$1,836.55, ou seja, insignificante. Já para valores elevados de g (tempo necessário para coleta da amostra e interpretação dos resultados), o procedimento parece não funcionar muito bem

para valores relativamente baixos. Utilizando $g=0.5$ ao invés dos 0.05, a projeção ótima encontrada foi $n = 2$, $h = 0.9$ e $k = 3.1$, a perda de custos, para 100 horas foram: \$607.92 no primeiro caso e \$540.35 no segundo, uma diferença de mais de 12%. Outras conclusões obtidas por Duncan (1956) foram:

- O tamanho ótimo de amostra é amplamente determinado pelo δ ; isto quer dizer que cartas \bar{X} são melhores para detecção de maiores deslocamentos;
- A variação no custo horário da penalidade associado à produção no estado fora de controle a_5 , tem relação grande com o intervalo entre amostras h . Quando a_5 é relativamente pequeno, h deve ser grande; quando a_5 é relativamente grande, h deve ser pequeno. Variação de a_5 tem pouco efeito sobre n e k ;
- Variações nos custos de investigação de um alarme falso a_4 e custo da determinação de uma causa atribuível a_3 tem efeito sobre o valor ideal de k ;
- Variação no custo variável de amostragem afeta os três elementos, n , h e k ;
- Variação no custo fixo de amostragem afeta principalmente a frequência de amostragem, tendo efeito moderado sobre o tamanho da amostra;
- Variação no tempo necessário para coleta da amostra e interpretação dos resultados g , afeta os três elementos, n , h e k . Um valor alto resulta em um menor tamanho da amostra, intervalo menor entre as amostras, e limites de controle mais restritos.

Percebe-se que Duncan já demonstrava a influência do parâmetro de deslocamento do processo (δ), do custo da determinação de uma causa atribuível (a_3), do custo de investigação de um alarme falso (a_4) e do custo horário da penalidade associado à produção no estado fora de controle (a_5) sobre os parâmetros n , h e k do projeto ótimo da carta de controle, tendo cada um deles efeitos diversos sobre os parâmetros acima mencionados.

2.3.2 Modelo econômico de Vommi e Seetala (2007)

Geralmente, os modelos como os de Duncan ou de outros autores, são testados para apenas um valor de δ (parâmetro de mudança de processo). Vommi e Seetala (2007) apresentam um modelo para mais de um valor de δ onde geram, assim, uma função de custo ponderado, possibilitando o ajuste de diferentes taxas de falhas, tempos para teste, tempos de procura, entre outros. Isto apresenta um ganho, onde se tem uma condição de operação ótima mais robusta pois são levados em consideração não apenas um único cenário mas diferentes cenários onde os custos podem ter comportamentos diferentes.

Em seu modelo, Vommi e Seetala (2007) utilizaram a expectativa ponderada (η), que tem a capacidade de considerar a frequência relativa dos cenários do processo para a concepção de uma carta de controle robusto. Esta estatística é uma medida do custo total esperado em todos os cenários do processo e é explicada a seguir. Considerando o processo com j cenários e a j -ésima frequência como f_j , o peso do cenário ω_j pode ser calculado por

$$\omega_j = \frac{f_j}{\sum_j f_j}. \quad (2.5)$$

Já que a taxa de falha do processo fornece as informações sobre a frequência das falhas do processo por unidade de tempo (falhas/hora), a frequência relativa de ocorrência das falhas para cada cenário é dada por sua taxa de falha correspondente (λ), onde a Equação (2.5) pode ser reescrita por

$$\omega_j = \frac{\lambda_j}{\sum_j \lambda_j}, \quad (2.6)$$

portanto, o custo esperado ponderado do processo com j cenários pode ser expresso por

$$\eta = \sum_j \omega_j E(L_j/n, h, k), \quad (2.7)$$

onde

$E(L_j/n, h, k) = \frac{\lambda_j a_{5j} B_j + \alpha a_{4j}/h + \lambda_j a_{3j}}{1 + \lambda_j B_j} + \frac{a_1 + a_2}{n}$ é o custo esperado por hora tal e qual apresentando por Duncan (1956),

a_1 = componente fixa do custo de amostragem,

a_2 = componente variável do custo de amostragem,

a_{3j} = custo da determinação de uma causa atribuível,

a_{4j} = custo de investigação de um alarme falso,

a_{5j} = custo horário da penalidade associado à produção no estado fora de controle,

α = probabilidade de um alarme falso,

$B_j = (1/p_j - 0.5 - \lambda_j h/12) \times h + gn + D_j$,

λ_j = parâmetro de distribuição Poisson (supõe-se que a causa atribuível ocorre com intensidade de λ ocorrências por hora),

g = tempo para testar e interpretar o resultado por unidade média amostral,

$p_j = \phi(-\delta_j \sqrt{n} - k) + \phi(\delta_j \sqrt{n} - k)$,

ϕ = densidade da distribuição normal padrão,

δ_j = parâmetro de mudança de processo,

D_j = tempo para procurar e corrigir a média do processo.

Para minimizar a equação (2.7), a fim de encontrar os melhores parâmetros da carta de controle, que minimizam o custo conjunto em todos os cenários, os autores utilizaram uma meta-heurística de otimização (algoritmo genético simples). O procedimento de projeto econômico usando a expectativa ponderada foi investigado pelos autores em um problema numérico, considerando como base o trabalho de Linderman e Choo (2002). Foram utilizados como domínio de entrada os seguintes parâmetros: $n = 2$ a 65, $h = 0,5$ a 40 e $k = 1,0$ a 4,5, e como parâmetros de custo e de processo em diferentes cenários aqueles apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros de custo e de processo em diferentes cenários

Parâmetros	Cenário		
	1	2	3
a_1	0.5	0.5	0.5
a_2	0.1	0.1	0.1
a_3	25	25	25
a_4	50	50	50
a_5	90	190	290
λ	0.01	0.01	0.01
δ	0.5	1.0	2.0
g	0.05	0.05	0.05
D	4.0	4.0	4.0

Fonte: Adaptado de Vommi e Seetala (2007)

Como melhor resultado, mediante a utilização do algoritmo genético, os autores encontraram os seguintes valores: Custo/hora ótimo [$\omega_i E(L_i/n, h, k)$] = 12,7116 com $n = 10$, $h = 1,1076$ e $k = 2,3699$, para o cenário da expectativa ponderada. O projeto econômico robusto de um processo com múltiplos cenários discretos foi simplificado por uma estatística simples, a expectativa ponderada, para seleção dos parâmetros da carta de controle. Os parâmetros da carta de controle obtidos mediante a utilização do algoritmo genético pela expectativa ponderada proporcionou melhores soluções em todos os 300 ensaios do que as soluções obtidas usando outros critérios como a robustez absoluta. Esta estatística fornece uma base para considerar a frequência relativa de ocorrência de cada cenário no projeto de uma carta de controle.

2.3.3 Modelo econômico de Vommi e Kasarapu (2014)

Neste novo modelo, Vommi e Kasarapu (2014) consideram para seu estudo uma distribuição para o parâmetro de mudança de processo δ e não mais um único valor para uma determinada causa atribuível. Os autores pretendem encontrar o melhor projeto de carta de controle, quando a mudança de processo segue uma distribuição dentro de um intervalo contínuo de valores. Os autores novamente utilizam como base o modelo econômico de Duncan (1956), onde a função de custo esperado $E(L)$ é apresentada na Equação (2.4).

A causa atribuível pode ser assumida para produzir diferentes valores de deslocamento no intervalo conhecido, diferentemente do que Duncan (1956) afirmava, que o custo de perda esperado baseia-se no pressuposto de que uma causa atribuível sempre produz um único deslocamento conhecido. A distribuição do parâmetro de mudança de processo δ pode ser conhecida no longo prazo. Assim, a distribuição de deslocamento pode ser assumida seguindo uma distribuição de probabilidade. Com isso a função de perda custo esperado apresentada na Equação (2.4) deve ser modificada para que esteja adequada a esta distribuição de deslocamento do processo.

Assumindo que o deslocamento δ ocorre entre dois valores possíveis e é finito, uma função de distribuição Beta é considerada para representá-lo.

A função de densidade de probabilidade do deslocamento de processo é descrita pelo autor conforme apresentada na Equação (2.8).

$$f(\delta) = \frac{(\delta - \delta_1)^{p-1}(\delta_2 - \delta)^{q-1}}{B(p, q)(\delta_2 - \delta_1)^{p+q-1}}, \delta_1 \leq \delta \leq \delta_2, \quad (2.8)$$

onde δ é a variável aleatória com distribuição de probabilidade Beta da mudança de processo e δ_1 e δ_2 são os valores limites de integração, onde $\delta_1 < \delta_2$. $B(p, q)$ é a função Beta sendo p e q os parâmetros da distribuição de probabilidade como apresentado na Equação (2.9).

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (2.9)$$

Os parâmetros p e q da distribuição Beta definem a forma da distribuição em relação a sua assimetria. Vommi e Kasarapu (2014) utilizam três combinações de parâmetros (p, q) da distribuição Beta $\{(4, 2), (2, 2)$ e $(2, 4)\}$, gerando distribuições com assimetria a esquerda, uniforme e a direita, respectivamente. Considerando uma função de distribuição de probabilidade Beta para o parâmetro de mudança, a probabilidade de que a mudança δ ocorra é $f(\delta)d\delta$. Assim, o custo da perda esperado é dado por:

$$E(L|\delta)f(\delta)d\delta, \quad (2.10)$$

e a função a ser otimizada para se obter os parâmetros ótimos para a carta de controle é

$$TE(L) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} [E(L|\delta)]f_{\delta}(\delta)d\delta, \quad (2.11)$$

onde $TE(L)$ é o custo da perda esperada total e pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\delta_1}^{\delta_2} [E(L|\delta)] f(\delta)d\delta &= \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left[\frac{(a_1 + a_2n)}{h} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_5[h/(1 - \beta) - \tau + gn + D] + a_3 + a_4\alpha e^{-\lambda h}/(1 - e^{-\lambda h})}{1/\lambda + h/(1 - \beta) - \tau + gn + D} \right] \times \\ &\quad \times f(\delta)d\delta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

As probabilidades de erro tipo I (α) e tipo II (β) são calculadas por

$$\alpha = 2\varphi(-k),$$

$$\beta = \int_{\delta_1}^{\delta_2} [1 - (\varphi(-k - \delta\sqrt{n}) + \varphi(\delta\sqrt{n} - k))]f(\delta)d\delta.$$

A otimização da Equação (2.12) serve para encontrar os parâmetros ideais da carta de controle, onde tem-se a distribuição de mudança de processo conhecida. Através da utilização da técnica de otimização, busca-se encontrar os valores ótimos de operação da carta, isto é, n , h e k .

Segundo Vommi e Kasarapu (2014), a variação dos parâmetros de custos é omitida em busca da simplicidade do modelo. Os autores apontam os seguintes motivos para esta decisão: (1) o efeito dos parâmetros de custo não é considerável em comparação com o parâmetro de deslocamento, e (2) os deslocamentos maiores têm a tendência a serem detectados mais cedo e os menores desvios podem demorar mais tempo para serem detectados. Portanto, em média, a penalidade de não se detectar as mudanças por hora pode ser tomada como uma constante. Note que estes argumentos contrariam as justificativas de Vommi e Seetala (2007), uma vez que a variação do custo em função do tamanho do deslocamento era um dos principais argumentos do trabalho.

Uma vez que a metodologia de Vommi e Kasarapu (2014) utiliza a distribuição de mudança de processo, ao invés de um processo de deslocamento constante ($\delta = 2$), as mudanças de parâmetros do processo foram escolhidos pelos autores nos intervalos $[0.5, 1.5]$, $[0.5, 2.5]$ e $[0.5, 3.5]$. O valor mais baixo do parâmetro de deslocamento é tomado como 0,5 porque cartas de controle de Shewhart não são as que apresentam os melhores desempenhos para detecção de deslocamentos menores do que esta magnitude. Para maiores informações sobre detecção rápida de pequenos deslocamentos, consulte Montgomery e Farias (2009).

Como resultado, os autores demonstram que os valores do custo são influenciados pelo tipo da distribuição e pelos parâmetros de deslocamento. Este método torna-se vantajoso na utilização de uma distribuição com assimetria positiva. Resultados similares são exibidos em casos onde os parâmetros da distribuição do deslocamento fazem com que ela se aproxime de um comportamento com distribuição uniforme. Ainda não se percebe benefícios tão notáveis neste modelo para distribuições de deslocamento com assimetria negativa.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 Caracterização da pesquisa e etapas do trabalho

A presente pesquisa, é classificada quanto a abordagem numa pesquisa quantitativa, onde a característica mais marcante é o ato de mensurar variáveis. Quanto ao método, a mesma é classificada como modelagem/simulação, utilizando técnicas matemáticas para que seja descrito o funcionamento do sistema e aplicando técnicas computacionais para efetuar a simulação do funcionamento deste sistema criado a partir dos modelos matemáticos. Quanto à classe de pesquisa, é classificada como pesquisa axiomática quantitativa normativa sendo caracterizada como um modelo que assegure que as soluções ajudem a esclarecer a estrutura do problema a ser tratado, que baseia-se em modelos que prescrevem uma decisão para o problema a ser tratado (CAUCHICK; FLEURY, 2012; GIL, 1995).

As etapas de trabalho são apresentadas na Figura 3.

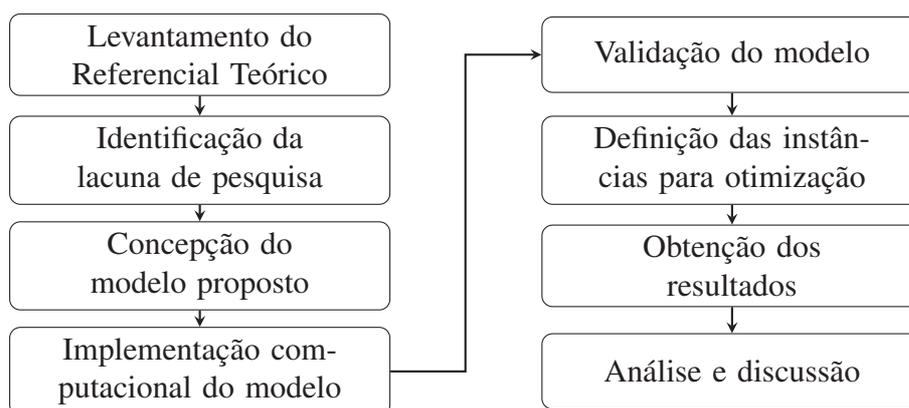


Figura 3: Etapas do método de trabalho

Fonte: Elaborado pelo autor

Inicialmente foi efetuado um levantamento bibliográfico exploratório para a definição do tema e do problema de pesquisa. A partir daí, foram elaborados os objetivos necessários para responder a questão norteadora da pesquisa. Estes elementos direcionaram o levantamento bibliográfico apresentado neste trabalho.

O levantamento bibliográfico buscou atender a dois objetivos: i) a apresentação de conceitos básicos que serviram de suporte para o desenvolvimento da pesquisa e ii) o levantamento de estudos que apresentam as discussões atuais relevantes na área de estudo, de forma a apresentar ao leitor deste trabalho o atual estado-da-arte.

Na pesquisa do referencial bibliográfico, foram utilizadas as seguintes palavras chave: *control chart*, *quality control*, *statistical process control*, *quality costs*, *control chart optimization*, *economic design* e suas respectivas versões em língua portuguesa. Como bases de dados, foram utilizadas para a pesquisa o portal de periódicos da Capes, bases de dados da Emerald, Elsevier, EBSCO e Springer. Como janela de tempo, foram pesquisados artigos publicados a partir do

ano de 2012. Uma vez que os artigos foram selecionados, a estratégia de bola de neve foi utilizada para buscar artigos anteriores a esta data, seminais para o desenvolvimento do trabalho (JALALI; WOHLIN, 2012).

Como identificação de lacuna de pesquisa, percebeu-se que Vommi e Seetala (2007) trouxeram à tona a questão dos custos e do parâmetro de mudança de processo (δ) serem tratados como variáveis discretas. Após isso, Vommi e Kasarapu (2014) tratam do parâmetro de mudança de processo (δ) como variável aleatória com distribuição de probabilidade dada pelo modelo contínuo Beta, afirmando que os custos não são relevantes, contradizendo sua publicação anterior. Então, o que se objetivou na pesquisa foi desenvolver um modelo onde pudesse ser avaliado não somente a variável δ mas também um custo dependente de um δ variável.

Com a utilização das fontes de evidências coletadas, criou-se um modelo conceitual do modelo de otimização, levando em consideração os aspectos apresentados. Foram utilizadas referências estatísticas e matemáticas para demonstração e prova de algumas proposições, até que se obteve então a equação de otimização de carta de controle apresentada na Equação (4.19) ou a sua versão simplificada na Equação (4.12).

Sendo assim, ocorreu a implementação deste modelo conceitual com a utilização de um modelo computacional implementado no software MATLAB versão R2012b. Por meio de discussões em grupo de estudo, foram efetuadas várias verificações em função do cálculo das integrais definidas sendo que foram adotadas estratégias para resoluções de problemas associados a implementação destes cálculos no computador. Como por exemplo, foram efetuados testes de mesa, cálculos parciais, entre outros até que se conseguisse chegar num modelo computacionalmente válido para o estudo. Também foram efetuados diversos ajustes na equação até que se obtivesse como resultado do modelo computacional valores de operação do CEP que fossem factíveis dentro do contexto analisado. A partir disto, foram definidas instâncias para otimização e validação utilizando para comparação os resultados de algumas instâncias propostas por Montgomery e Farias (2009) e Vommi e Kasarapu (2014) e que servirão para comparação entre os resultados do modelo ora proposto com os resultados do modelo de Vommi e Kasarapu (2014). Os resultados sub ótimos foram obtidos através da metaheurística do *simulated annealing* que será detalhada na sessão 3.2.

3.2 Método de Otimização *Simulated Annealing*

O *simulated annealing* é um algoritmo metaheurístico baseado em busca local, ou busca em vizinhança, desenvolvido para a solução de diversos problemas de otimização, especialmente os problemas combinatórios, através da simulação do processo de recozimento (annealing). Apresenta como principais vantagens, a sua capacidade de escapar de ótimos locais e facilidade de aplicação, comparados a outras metaheurísticas de busca em trajetória (CHIBANTE, 2010; SOARES; ANTUNES; ARAÚJO, 2013).

Recozimento, é um processo metalúrgico de alteração das propriedades físicas dos mate-

riais, obtido através do aquecimento do material até sua temperatura de fusão seguido de um lento resfriamento até a cristalização da estrutura. Como o aquecimento permite aos átomos se movimentarem de forma aleatória, o processo de resfriamento deve ser lento o suficiente para permitir que os átomos se movam para posições com a menor energia possível dentro da estrutura. Considerando este procedimento como um problema de otimização, se o arranjo de átomos obtido for o de menor energia possível, este arranjo pode ser interpretado como a solução ótima para o problema de minimização da energia na estrutura (SOARES; ANTUNES; ARAÚJO, 2013). O Simulated Annealing vale-se desta analogia na busca por uma solução ótima de um determinado problema de otimização (MICHALEWICZ; FOGEL, 2013). Kirkpatrick, Vecchi et al. (1983) e Černý (1985) demonstraram esta analogia entre o comportamento dos problemas de otimização combinatória e os grandes sistemas físicos estudados em mecânica estatística. Estes autores demonstraram que o modelo da mecânica estatística para simular processos de annealing (recozimento), proposto inicialmente por Metropolis et al. (1953), podia ser estendido para resolver problemas de otimização em geral, especialmente os de origem combinatória.

Como algoritmo de busca, ele é classificado como um algoritmo de busca em trajetória, que tem como característica a convergência para um mínimo local, porém também aceitam soluções que podem piorar o valor da função objetivo e possuem características mais voltadas à intensificação. Diferencia-se de algoritmos de busca populacional que iniciam seu processo de otimização considerando um conjunto prévio de soluções, onde cada indivíduo representa uma solução viável para o problema tratado. Ao gerar novos indivíduos pelo processo de iteração, as populações vão sendo substituídas por novas soluções. O principal fator de eficiência e eficácia deste tipo de metaheurística de busca populacional é a definição da população inicial, onde o critério a ser considerado deve ser o da diversificação. (TALBI, 2009; RAIDL, 2006; KIRKPATRICK; VECCHI et al., 1983).

Supõe-se que algoritmos populacionais ou de estratégias de hibridização consigam melhores resultados se comparados com os algoritmos de busca em trajetória pois através da utilização de várias soluções candidatas pode-se explorar um espaço maior de soluções, possibilitando assim, diferentemente dos métodos por trajetória, uma maior possibilidade de fuga de ótimos locais ou a aceitação de soluções piores. Uma maior amplitude na busca por regiões promissoras no espaço de soluções é o que caracteriza a diversificação e conseqüentemente a busca de soluções melhores (RAJAB, 2012).

O *simulated annealing* utiliza o algoritmo de Metropolis et al. (1953) para simular a busca pelo equilíbrio térmico. Pode-se assumir uma analogia entre o processo físico e o processo de otimização combinatória baseada nas seguintes equivalências (KORST, 1990):

- O valor da função objetivo do problema de otimização equivale à energia do sólido no processo físico de resfriamento em direção ao equilíbrio térmico;
- Soluções intermediárias de um problema de otimização equivalem às etapas de resfriamento da matéria;

- A seleção de uma solução vizinha em um problema de otimização equivale à perturbação de um estado físico;
- O ótimo global de um problema de otimização equivale ao estado fundamental de um sistema de partículas;
- Um ótimo local de um problema de otimização é equivalente a um resfriamento rápido de um sistema físico, mantendo átomos em posições de alta energia.

O algoritmo, quando aplicado a um problema de otimização, compara a cada iteração, os valores para duas soluções (a solução atual e uma solução vizinha recém selecionada). O aceite de soluções que pioram a função objetivo é tolerado, na esperança de escapar de ótimos locais durante a busca do ótimo global. A probabilidade de aceitação de soluções piores depende de um parâmetro de temperatura, que normalmente sofre um decréscimo a cada iteração do algoritmo, para possibilitar a saída de ótimos locais. À medida que o parâmetro de temperatura é reduzido, aproximando-se de zero, a aceitação de soluções piores ocorre com menos frequência, concentrando a busca na vizinhança solução ótima local (GENDREAU; POTVIN, 2010). O pseudocódigo do *Simulated Annealing* é apresentado no Algoritmo 1, onde

T_0 = Temperatura inicial;

T_f = Temperatura final;

α = Velocidade de resfriamento;

L = Número de iterações por ciclos de temperatura;

$nbsc$ = Número de melhores soluções encontradas;

$nlim$ = Número de iterações consecutivas;

fo = solução inicial;

fo^c = melhor solução local;

fo^* = melhor solução obtida.

i = contador de iterações por ciclo de temperatura.

L = número máximo de iterações por ciclo de temperatura.

Para validação do Algoritmo proposto, utilizou-se uma instância proposta no exemplo 9-5 de Montgomery e Farias (2009, p.309), que também foi utilizada por Ganguly e Patel (2012) e Sultana et al. (2014) para validação da suas propostas de algoritmo para o modelo de otimização de cartas de controle de Duncan (1956). Os resultados obtidos pelo algoritmo proposto foram comparados com os resultados obtidos pelos três trabalhos, validando assim a eficácia do algoritmo.

3.3 Validação do Algoritmo *Simulated Annealing*

O algoritmo *Simulated Annealing* foi implementado com base no modelo de Metropolis et al. (1953) em MATLAB versão R2012b. A função objetivo definida foi o modelo de Duncan (1956) para otimização de cartas de controle \bar{X} , considerando como variáveis de decisão o tamanho das amostras n , intervalo entre as coletas h (em horas) e a amplitude do intervalo de

Resultado: Valor da função objetivo próximo ao ótimo global

Entrada: $f_o, T_0, T_f, \alpha, nlim, nbsc, i$ e L

Saída: f_o^*

```

1  Obtenha uma solução inicial como função objetivo  $f_o$ 
2  Defina as temperaturas  $T_0$  and  $T_f$ 
3  Defina a velocidade de resfriamento ( $\alpha$ )
4  Defina  $nlim$  e  $nbsc$ 
5  Defina  $i$  e  $L$ 
6  enquanto ( $t > T_f$  or  $nbsc < nlim$ ) faça
7      repita
8          Busca solução na vizinhança
9          Calcula a  $f_o^c$ 
10         se  $f_o^c - f_o \leq 0$  então
11              $f_o = f_o^c$ 
12             se  $f_o - f_o^* \leq 0$  então
13                  $f_o^* = f_o$ 
14                  $nbsc = nbsc + 1$ 
15         senão
16             Obtenha  $X \sim U(0, 1)$ 
17             se  $X > e^{-(f_o^c - f_o)/t}$  então
18                  $f_o = f_o^c$ 
19         fim
20          $i = i + 1$ 
21     até  $i = L$ 
22      $t = \alpha \times t$ 
23 fim

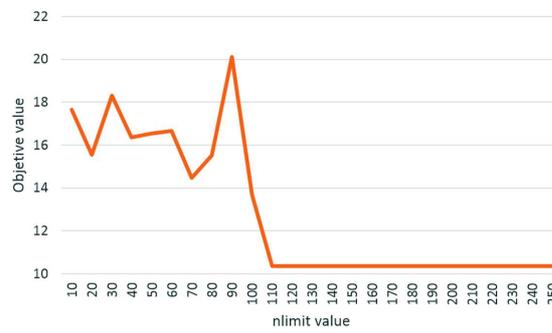
```

Algoritmo 1: Simulated Annealing (GASPAR-CUNHA; TAKAHASHI; ANTUNES, 2012)

controle k (em desvios padrão). Os demais parâmetros referentes aos custos foram previamente obtidos a partir do exemplo proposto por Montgomery e Farias (2009), e dos dados da aplicação real, sendo programados no algoritmo com base no caso a ser otimizado.

Uma etapa de sintonização dos parâmetros de funcionamento do *Simulated Annealing* foi realizada de forma a identificar os valores mais adequados para a temperatura inicial (T_0), L e o critério de parada número de melhorias (n_{lim}) no processo de otimização. Com auxílio do software G*Power (FAUL et al., 2007), definiu-se em 36 o número de repetições adequadas para estimação do intervalo de confiança, com significância de 5% e poder de 90%, considerando a meia amplitude do intervalo como 0,5 desvio-padrão. A sintonia dos parâmetros permite que o algoritmo seja ajustado com valores que produzem resultados mais promissores, buscando melhorar a sua performance na aplicação prática a qual se destina.

A Figura 4 apresenta os resultados obtidos durante o processo de sintonia do critério de parada de limite de melhorias da função objetivo n_{lim} , demonstrando a obtenção da solução ótima (a) e do desvio médio da função objetivo (b).



(a) Melhor valor da função objetivo

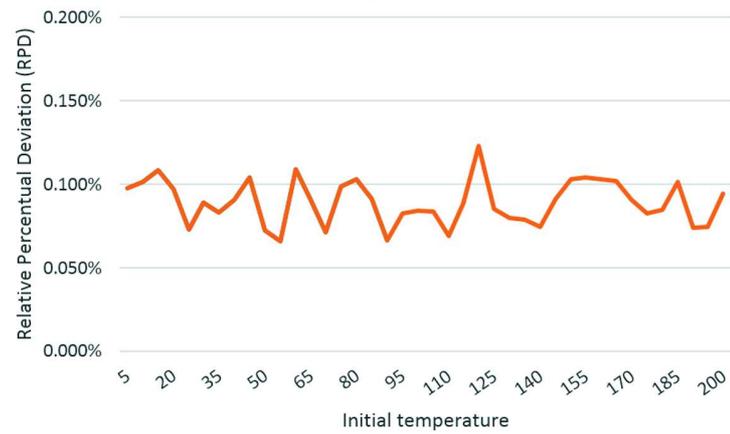


(b) Desvio médio da função objetivo

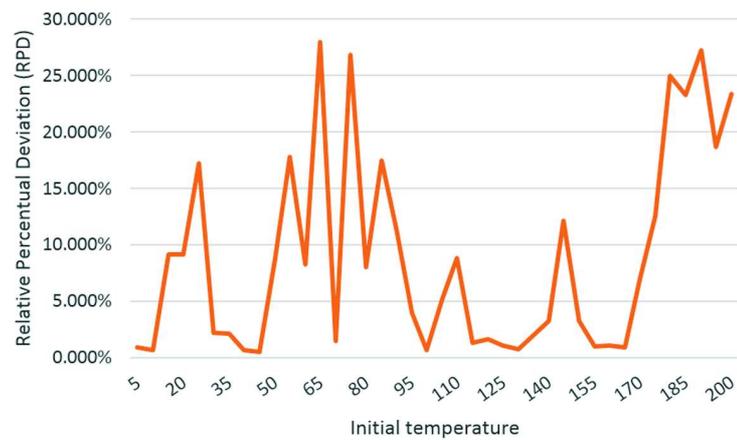
Figura 4: Critério de ajuste de sintonia n_{lim}

Para tal, fixou-se os demais parâmetros: número de iterações $L_k = 300$, temperatura final $t_f = 10^{-100}$ e a temperatura inicial $t = 20$. Verificou-se que para valores onde $n_{lim} < 110$, há uma grande variabilidade no desvio dos valores da função objetivo obtidos nas sucessivas execuções em relação à média, além do fato de nenhuma das execuções atingir o valor ótimo conhecido da função objetivo. Para todas as execuções com $n_{lim} \geq 110$, o desvio médio da função objetivo apresentou valores baixíssimos, inferiores a 1%, e frequentemente o algoritmo encontrou o valor ótimo conhecido. Devido a isto, foi selecionado o valor de $n_{lim} = 110$. Para cada valor de n_{lim} foram efetuadas 45 repetições.

Uma vez estabelecido o valor de n_{lim} , procedeu-se a sintonia da temperatura inicial t . Utilizou-se para tal, o mesmo procedimento anterior, fixando-se o valor de n_{lim} e variando-se o valor de t ao longo da escala para verificar qual seria o mais adequado. Realizou-se uma varredura nos valores de temperatura inicial entre os valores $t = 5$ e $t = 200$, variando seu valor em 5 graus por vez. Admitiu-se valores onde os desvios percentuais relativos da função objetivo em relação ao menor valor de F_0 atingido durante todas as rodadas e o do tempo médio de execução estejam abaixo de 0,1% e abaixo de 5%, respectivamente, este critério foi adotado pois o valor ótimo não era conhecido. Durante este processo, cujos resultados podem ser verificados na Figura 5, foi selecionado o valor de $t = 130$.



(a) Desvio Percentual relativo da função objetivo



(b) Desvio Percentual relativo do tempo de corrida

Figura 5: Parâmetro de sintonia de temperatura inicial

Como forma de compreender o comportamento das variáveis durante o processo de otimização e identificação das relações interativas entre elas e os elementos do modelos de otimização de cartas de controle, realizou-se uma análise de sensibilidade das variáveis utilizando-se o caso exemplificado na obra de Montgomery e Farias (2009) como referência.

Uma etapa de validação do algoritmo foi realizada, utilizando-se uma instância de referência da literatura para o modelo de Duncan (1956), utilizando-se o exemplo 9-5 apresentado por Montgomery e Farias (2009), executou-se a comparação dos resultados obtidos. O exemplo descreve a situação de um fábrica de garrafas, apresentando os seguintes parâmetros: $a_1 = \$1$; $a_2 = \$0.10$; $a_3 = \$25$, $a_5 = \$50$, $a_4 = \$100$, $\lambda = 0,005$, $\delta = 2$, $g = 0,0167$ and $D = 1,0$.

Para otimizar este problema, Montgomery e Farias (2009), utilizou-se de um programa escrito em código FORTRAN (MONTGOMERY, 1983), que fornece como valor ótimo $n = 5$, $h = 0,76$ e $k = 2,99$ para esta instância obtendo um custo de \$10,38. Este mesmo exemplo foi utilizado em Ganguly e Patel (2012) e Sultana et al. (2014) na validação da sua proposta de *Simulated Annealing* para otimização do modelo de Duncan (1956). A Tabela 3 apresenta o comparativo entre os valores obtidos pelo algoritmo proposto e pelo proposto por Ganguly e Patel (2012) para diversos valores de n .

Tabela 3: Comparação de custos em função de n amostras

n	SA proposto			Ganguly e Patel (2012) SA			Montgomery e Farias (2009)		
	h	k	E(L)	h	k	E(L)	h	k	E(L)
1	0,5000	2,2800	14,6564	0.49	2.30	14,66	0.45	2.3	14,71
2	0,6000	2,5200	11,8776	0.62	2.51	11,88	0.57	2.52	11,91
3	0,7000	2,6800	10,8817	0.72	2.68	10,88	0.66	2.68	10,90
4	0,8000	2,8195	10,4922	0.77	2.84	10,49	0.71	2.84	10,51
5	0,8000	2,9800	10,3676	0.81	2.98	10,36	0.76	2.99	10,38
6	0,9000	3,1000	10,3857	0.85	3.12	10,38	0.79	3.13	10,39
7	0,9000	3,2500	10,4660	0.89	3.26	10,47	0.82	3.27	10,48
8	0,9000	3,4000	10,5899	0.92	3.40	10,59	0.85	3.40	10,60
9	0,9000	3,5400	10,7382	0.95	3.51	10,74	0.87	3.53	10,75
10	1,0000	3,6495	10,8927	0.97	3.67	10,89	0.89	3.66	10,90
11	1,0000	3,7795	11,0514	0.98	3.82	11,05	0.92	3.78	11,06
12	1,0000	3,9000	11,2148	0.99	3.94	11,22	0.94	3.90	11,23
13	1,0000	4,0295	11,3809	0.99	4.15	11,38	0.96	4.02	11,39
14	1,1000	4,1295	11,5424	0.99	4.19	11,55	0.98	4.14	11,56
15	1,1000	4,2400	11,7014	1,00	4.26	11,72	1,00	4.25	11,72

A Tabela 4 apresenta uma comparação entre o algoritmo proposto e as referências obtidas da literatura, confrontando os valores de custo ótimo obtidos, os parâmetros utilizados para obtê-lo e as probabilidades de erro do tipo I e II. Percebe-se que o algoritmo *Simulated Annealing* é validado, uma vez que os valores obtidos através dele como valores ótimos convergem para os mesmos valores obtidos pelos outros autores utilizados na comparação. Isto pode ser observado tanto na Tabela 3 quanto na Tabela 4.

Tabela 4: Comparação de algoritmos

Algoritmo	A	B	C	D
Tamanho de amostra ótimo (n)	5	5	5	5
Amplitude do intervalo de controle ótimo (k)	2,99	2,98	3,04	2,99
intervalo entre coletas ótimo (h)	0,76	0,81	0,83	0,80
Probabilidade do erro Tipo-I (α)	0,0028	-	0,0024	0,0028
Probabilidade do erro Tipo-II (β)	0,0692	-	0,0782	0,0692
Custo ótimo	10,38	10,36	10,38	10,37

A = Montgomery FORTRAN, B = Ganguly SA*,
 C = Amostra discreta Sultana SA, D = SA proposto

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

O capítulo de discussão e análise dos resultados apresentará inicialmente o modelo proposto seguido das instâncias obtidas a partir da literatura e que foram utilizadas para a avaliação do modelo proposto. Posteriormente, são apresentados e discutidos os resultados da otimização com o algoritmo do *simulated annealing*. Na sequência, são apresentados e discutidos os resultados de validação do comportamento do modelo a partir da análise de sensibilidade com a variação dos parâmetros σ_{a_3} , σ_{a_5} , ρ_{a_3} e ρ_{a_5} , como apresentado no método de trabalho.

4.1 Modelo econômico proposto

A proposta de Vommi e Seetala (2007) aponta para apenas valores discretos de deltas, com variação de custos. A proposta de Vommi e Kasarapu (2014) considera intervalos de variação contínuos para o tamanho do δ , desvio em relação a média. A abordagem dos autores utiliza a distribuição Beta para explicar o comportamento da variável δ . Entretanto, um dos principais argumentos de Vommi e Seetala (2007) era que diferentes deltas apresentavam diferentes custos. No estudo de Vommi e Kasarapu (2014) os autores afirmam que a variação dos custos não deve ser tão significativa e que o modelo é apresentado apenas considerando o delta como variável contínua por simplificação, tendo em vista a complexidade computacional adicional em modelar conjuntamente os custos como variáveis aleatórias.

Assim, a abordagem aqui proposta apresenta, a partir de algumas suposições, tanto o delta como os custos a_3 e a_5 , custo de determinar uma causa atribuível e custo horário associado a produção no estado fora de controle respectivamente, como variáveis aleatórias. A inclusão dos outros custos levantados no modelo original na abordagem proposta é simples e pode ser estendido sem significativo aumento de complexidade.

Inicialmente considere o modelo de Duncan (1956) onde a função de custo esperado $E(L)$ é apresentada na Equação (2.4).

Vommi e Kasarapu (2014) apresentam a distribuição Beta como alternativa para a variável δ , uma vez que supõe um intervalo finito entre dois possíveis valores para a variação da alteração do nível do processo. Assim, os autores apresentam a distribuição Beta aplicada num intervalo entre δ_1 e δ_2 , limite inferior e superior do desvio em relação a média, respectivamente, conforme a seguinte Equação (4.1).

$$f(x|p, q) = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{\mathbf{B}(p, q)}, \quad (4.1)$$

onde

$$\mathbf{B}(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt.$$

Sabe-se que os parâmetros p e q da distribuição Beta definem a forma da distribuição quanto a sua assimetria. Vommi e Kasarapu (2014) utilizam como valores dos parâmetros os seguintes

pares $(p, q) : (4, 2); (2, 2)$ e $(2, 4)$ o que gera distribuições betas com assimetria a esquerda, uniforme e a direita, respectivamente. Entretanto, com base em um histórico de dados, os valores p e q podem ser estimados a partir da média e variância observados em uma amostra como demonstrado em Vaccaro e Korzenowski (unpublished) e reproduzido a seguir:

Proposição 1. *Seja $X \sim B(p, q)$ uma variável com distribuição Beta com média μ e variância σ^2 . Então*

$$p = \mu \left(\frac{(1 - \mu)\mu}{\sigma^2} - 1 \right) \quad (4.2)$$

e

$$q = (1 - \mu) \left(\frac{(1 - \mu)\mu}{\sigma^2} - 1 \right). \quad (4.3)$$

Prova. Considere que a média μ e a variância σ^2 da variável β são funções dos parâmetros da distribuição de modo que:

$$\mu = \frac{p}{p + q}, \quad (4.4)$$

$$\sigma^2 = \frac{pq}{(p + q)^2 (p + q + 1)}, \quad (4.5)$$

e resolvendo (4.4) em q obtém-se

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{p}{p + q}, \\ \mu(p + q) &= p, \\ q &= p \frac{(1 - \mu)}{\mu}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (4.5) e resolvendo para p obtém-se

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{p^2 \frac{1-\mu}{\mu}}{\left(p + \frac{p(1-\mu)}{\mu}\right)^2 \left(p + \frac{p(1-\mu)}{\mu} + 1\right)} = \frac{(1 - \mu) \mu^2}{p + \mu}, \\ p + \mu &= \frac{(1 - \mu) \mu^2}{\sigma^2}, \\ p &= \mu \left(\frac{(1 - \mu) \mu}{\sigma^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Substituindo (4.2) em (4.6) resulta em

$$q = (1 - \mu) \left(\frac{(1 - \mu) \mu}{\sigma^2} - 1 \right). \quad (4.7)$$

□

O uso prático do resultado prévio é obtido utilizando as expressões (4.2) e (4.3), e considerando que μ e σ podem ser estimados pelos seus estimadores de máxima verossimilhança (4.8) e (4.9).

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4.8)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2. \quad (4.9)$$

Considerando a função de distribuição de probabilidade Beta para o parâmetro de desvio da média do processo, a probabilidade de que o parâmetro de desvio δ ocorra é $f(\delta)$. Assim, a função de custo esperado é dada por

$$E(L|\delta) \times f(\delta)$$

e a equação de custo esperado a ser minimizada apresentada por Vommi e Kasarapu (2014) é

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} [E(L|\delta)] \times f(\delta) d\delta. \quad (4.10)$$

Entretanto, ao incluir os custos a_3 e a_5 como variáveis no modelo, altera-se a função de custo esperado, que passa a ter a seguinte forma

$$E(L|\delta, A_3, A_5) \times f(\delta, a_3, a_5).$$

A função de probabilidade conjunta $f(\delta, a_3, a_5)$, de acordo com Vommi e Kasarapu (2014), pode ser consideravelmente complexa, porém, a partir dos conceitos de probabilidade condicionada, pode-se simplificá-la de modo a tornar mais simples de operá-la. Esta simplificação é apresentada na Proposição 2.

Proposição 2. *Considere que os custos a_3 e a_5 são independentes entre si, porém dependentes do tamanho do desvio δ na média do processo. Pode-se deduzir que*

$$f(\delta, a_3, a_5) = f(\delta) \times f(a_3, a_5|\delta) = f(\delta) \times f(a_3|\delta) \times f(a_5|\delta). \quad (4.11)$$

Incorporando (4.11) em (4.10), a função de custo esperado a ser minimizada torna-se

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\delta_1}^{\delta_2} [[E(L|\delta, A_3, A_5)] \times f(\delta) \times f(a_3|\delta) \times f(a_5|\delta)] d\delta da_3 da_5. \quad (4.12)$$

A Definição 1 define e caracteriza a distribuição condicionada $a_i|\delta$. A fim de tornar o texto mais claro, a partir deste ponto será suprimido o índice i da distribuição na apresentação das

expressões matemáticas.

Definição 1. *Considerando que:*

1. A variável aleatória contínua A segue um modelo de distribuição Normal para cada valor de δ ;
2. A média condicional de A dado δ , isto é, $E(A|\delta) = \mu_{A|\delta}$, é linear em δ ; e
3. A variância condicional de A dado δ , isto é $Var(A|\delta) = \sigma_{A|\delta}^2$, é constante, isto é, o mesmo para cada δ .

tem-se que a distribuição condicional de A dado δ segue a seguinte distribuição Normal:

$$A|\delta \sim \mathbf{N}(\mu_{A|\delta}; \sigma_{A|\delta}^2) \quad (4.13)$$

com esperança e variância dados pelas equações (4.14) e (4.15).

$$E(A|\delta) = \mu_{A|\delta} = \mu_A + \rho \frac{\sigma_A}{\sigma_\delta} (\delta - \mu_\delta) \quad (4.14)$$

$$Var(A|\delta) = \sigma_{A|\delta}^2 = \sigma_A^2 (1 - \rho^2) \quad (4.15)$$

onde ρ é o coeficiente de correlação entre o desvio δ e o custo a_i .

Prova. Assumindo que $E(A|\delta)$ é linear em δ , pode-se ajustar um modelo de Regressão Linear Simples entre A e δ de modo que $\hat{a} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\delta$, onde $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são as estimativas dos coeficientes linear e angular do modelo de regressão. Sabe-se que $\hat{\alpha} = \bar{A} - \hat{\beta}\bar{\delta}$ e substituindo $\hat{\alpha}$ em \hat{a} obtém-se $\hat{a} = \bar{A} + \hat{\beta}(\delta - \bar{\delta})$. Logo, pode-se escrever $E(A|\delta)$ como

$$E(A|\delta) = \mu_A + \hat{\beta}(\delta - \bar{\delta}). \quad (4.16)$$

Uma vez que

$$\hat{\beta} = \frac{Cov(A, \delta)}{\sigma_A^2} \text{ e } \rho = \frac{Cov(A, \delta)}{\sigma_A \times \sigma_\delta},$$

a partir de (4.16) obtém-se

$$\begin{aligned} E(A|\delta) &= \mu_A + \frac{Cov(A, \delta)}{\sigma_A^2} (\delta - \bar{\delta}), \\ &= \mu_A + \frac{Cov(A, \delta)}{\sigma_A^2} \frac{\sigma_A \sigma_\delta}{\sigma_A \sigma_\delta} (\delta - \bar{\delta}), \\ &= \mu_A + \rho \frac{\sigma_\delta}{\sigma_A} (\delta - \bar{\delta}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por outro lado, a definição de variância condicional de A dado δ , considerando que A e δ são variáveis aleatórias contínuas, é:

$$\sigma_{A|\delta}^2 = \text{Var}(A|\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (a - \mu_{A|\delta})^2 \times f(A|\delta) dA.$$

Substituindo $\mu_{A|\delta}$ no integrando pela expressão $E(A|\delta)$, obtém-se:

$$\sigma_{A|\delta}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (a - \mu_A - \rho \frac{\sigma_\delta}{\sigma_A} (\delta - \bar{\delta}))^2 \times f(A|\delta) dA$$

e multiplicando ambos os lados da equação por $f(\delta)$ e integrando sobre a variação de δ , obtém-se

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \sigma_{A|\delta}^2 f(\delta) d\delta = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \int_{-\infty}^{+\infty} (a - \mu_A - \rho \frac{\sigma_\delta}{\sigma_A} (\delta - \bar{\delta}))^2 \times h(A|\delta) \times f(\delta) dA d\delta.$$

Uma vez que $\sigma_{A|\delta}^2$ é constante em relação à δ , o resultado para a integral $\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(\delta) d\delta$ é 1 e $h(A|\delta) \times f(\delta) = f(A, \delta)$, tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_{A|\delta}^2 \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(\delta) d\delta &= \int_{\delta_1}^{\delta_2} \int_{-\infty}^{+\infty} (a - \mu_A - \rho \frac{\sigma_\delta}{\sigma_A} (\delta - \bar{\delta}))^2 \times f(A, \delta) dA d\delta \\ \sigma_{A|\delta}^2 &= E \left\{ \left[(a - \mu_A) - \left(\rho \frac{\sigma_\delta}{\sigma_A} (\delta - \bar{\delta}) \right) \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Como $\left[(a - \mu_A) - \left(\rho \frac{\sigma_\delta}{\sigma_A} (\delta - \bar{\delta}) \right) \right]^2$ é um produto notável então pode-se rescrever $\sigma_{A|\delta}^2$ como

$$\sigma_{A|\delta}^2 = E \left[(a - \mu_A)^2 - 2(a - \mu_A) \left(\rho \frac{\sigma_\delta}{\sigma_A} (\delta - \bar{\delta}) \right) + \left(\rho \frac{\sigma_\delta}{\sigma_A} (\delta - \bar{\delta}) \right)^2 \right]$$

e aplicando a propriedade distributiva da esperança, tem-se

$$\sigma_{A|\delta}^2 = E(a - \mu_A)^2 - 2\rho \left(\frac{\sigma_\delta}{\sigma_A} \right) E[(a - \mu_A)(\delta - \bar{\delta})] + \rho^2 \left(\frac{\sigma_\delta}{\sigma_A} \right)^2 E(\delta - \bar{\delta})^2$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} E(a - \mu_A)^2 &= \sigma_A^2 \\ E(\delta - \mu_\delta)^2 &= \sigma_\delta^2 \\ E[(A - \mu_A)(\delta - \mu_\delta)] &= \text{Cov}(A, \delta) = \rho \sigma_A \sigma_\delta \end{aligned}$$

pode-se obter como resultado que $\sigma_{A|\delta}^2 = \sigma_A^2(1 - \rho^2)$ como mostra a Expressão (4.18).

$$\begin{aligned}
 \sigma_{A|\delta}^2 &= \sigma_A^2 - 2\rho \left(\frac{\sigma_\delta}{\sigma_A} \right) \rho \sigma_A \sigma_\delta + \rho^2 \left(\frac{\sigma_\delta}{\sigma_A} \right)^2 \sigma_\Delta^2 \\
 &= \sigma_A^2 - 2\rho^2 \sigma_A^2 + \rho^2 \sigma_A^2 \\
 &= \sigma_A^2 - \rho^2 \sigma_A^2 \\
 &= \sigma_A^2(1 - \rho^2)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

□

Assim, o modelo de otimização para gráfico de controle, considerando o desvio e custos como variáveis aleatórias e definido a partir da Equação (4.12), tem a seguinte equação estendida a ser implantada para otimização da carta:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\delta_1}^{\delta_2} [[E(L|\delta, A_3, A_5)] \times f(\delta) \times f(a_3|\delta) \times f(a_5|\delta)] d\delta da_3 da_5 = \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(\frac{(a_1 + a_2 n)}{h} + \frac{a_5 |\delta [h/(1 - \beta) - \tau + gn + D] + a_3 |\delta + a_4 \alpha e^{-\lambda/h} / (1 - e^{-\lambda/h})}{1/\lambda + h/(1 - \beta) - \tau + gn + D} \right) \times \\
 &\quad \times (\delta - \delta_1)^{p-1} \frac{(\delta_2 - \delta)^{q-1}}{B(\delta_2 - \delta_1)^{p+q-1}} \times \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_{a_3|\Delta}^2)}} \exp\left(\frac{-(a_3 - \mu_{a_3|\delta})^2}{2\sigma_{a_3|\delta}^2}\right) \times \\
 &\quad \times \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_{a_5|\Delta}^2)}} \exp\left(\frac{-(a_5 - \mu_{a_5|\delta})^2}{2\sigma_{a_5|\delta}^2}\right) d\delta da_3 da_5
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde

a_1 = componente fixa do custo de amostragem,

a_2 = componente variável do custo de amostragem,

a_3 = custo da determinação de uma causa atribuível,

a_4 = custo de investigação de um alarme falso,

a_5 = custo horário da penalidade associado à produção no estado fora de controle,

n = tamanho da amostra,

h = intervalo entre coletas,

k = amplitude do intervalo de controle,

β = probabilidade do erro tipo II,

τ = tempo de ocorrência da causa atribuível entre amostras consecutivas,

α = probabilidade do erro tipo I,

λ = frequência esperada por hora de ocorrência de causas atribuíveis,

g = tempo necessário para coleta da amostra e interpretação dos resultados,

D = tempo exigido para achar a causa atribuível subsequente a um sinal de ação,

δ = parâmetro de deslocamento do processo,

δ_1 = limite inferior do desvio em relação a média (parâmetro de deslocamento do processo),

δ_2 = limite superior do desvio em relação a média (parâmetro de deslocamento do processo),

p = parâmetro de forma da distribuição Beta obtido a partir de dados históricos de desvios observados no processo e determinados a partir da Equação (4.2),

q = parâmetro de escala da distribuição Beta obtido a partir de dados históricos de desvios observados no processo e determinados a partir da Equação (4.3),

σ_{a_3} = desvio padrão do custo a_3 ,

ρ_{a_3} = correlação entre o delta e o a_3 ,

σ_{a_5} = desvio padrão do custo a_5 ,

ρ_{a_5} = correlação entre o delta e o a_5 ,

μ_δ = média do parâmetro de deslocamento do processo,

σ_δ = variância do parâmetro de deslocamento do processo,

$\mu_{a_3|\delta}$ = custo médio esperado de a_3 condicionado ao tamanho do desvio obtido a partir da Equação (4.14),

$\mu_{a_5|\delta}$ = custo médio esperado de a_5 condicionado ao tamanho do desvio obtido a partir da Equação (4.14),

$\sigma_{a_3|\delta}^2$ = variância do custo a_3 condicionado ao tamanho do desvio obtido a partir da Equação (4.15),

$\sigma_{a_5|\delta}^2$ = variância do custo a_5 condicionado ao tamanho do desvio obtido a partir da Equação (4.15).

Os valores μ_δ e σ_δ podem ser obtidos através das Equações (4.8) e (4.9) e os custos a_3 e a_5 estão sendo considerados como variáveis aleatórias no modelo proposto. Os parâmetros $\mu_{a_3|\delta}$ e $\mu_{a_5|\delta}$ são estimados no processo. Como eles possuem grande dificuldade para serem estimados, os parâmetros $\sigma_{a_3|\delta}$ e $\sigma_{a_5|\delta}$ representam os níveis de incerteza associado à estimativa dos custos e podem ser obtidos a partir de consenso entre especialistas do processo.

Os parâmetros ρ_{a_3} (correlação entre o delta e o a_3) e ρ_{a_5} (correlação entre o delta e o a_5) representam a direção e força do relacionamento entre o tamanho do desvio e os respectivos custos. Seus valores também podem ser definidos por especialistas sendo que se o desvio exerce grande influência nos custos, este parâmetro deve ser aproximado ao valor unitário, enquanto que se o desvio exerce pouco ou nenhuma influência nos custos, este parâmetro deve aproximar-se do valor nulo.

Sendo assim, para a implantação do gráfico de controle, é necessário que se tenha histórico de desvios para que se possa estimar o desvio médio e a variabilidade do desvio. Também é necessário a indicação do tipo e intensidade do relacionamento entre os custos a_3 e a_5 e o desvio, bem como uma estimativa da média e da incerteza associada à confiança a respeito da informação dos custos de operação da carta.

4.2 Instâncias para avaliação do modelo de otimização da carta \bar{X} proposto

Para efeito de otimização através da metaheurística, foram utilizados os mesmos parâmetros de variação das variáveis de decisão de otimização da carta de controle (n , h e k) adotados por Vommi e Kasarapu (2014) e que são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5: Parâmetros de variação do gráfico de controle

Série	Parâmetros da carta de controle	Faixa de cada parâmetro
1	Tamanho da amostra (n)	$2 \leq n \leq 33$
2	Intervalo de amostragem (h)	$0,08 \leq h \leq 8$
3	Amplitude do limite de controle (k)	$1 \leq k \leq 4,5$

Fonte: Adaptado de Vommi e Kasarapu (2014)

Utilizou-se algumas instâncias de Vommi e Kasarapu (2014) sendo apresentadas na Tabela 6. Para efeito de validação do modelo, está se adotando o valor de ρa_3 (correlação entre o δ e o a_3) = -0.5, ρa_5 (correlação entre o δ e o a_5) = 0.5, como valores de custos médios serão utilizados os valores propostos por Vommi e Kasarapu (2014). Estes valores de ρ representam uma correlação moderada entre estes elementos e o objetivo aqui não é estabelecer uma correlação nem fraca nem forte pois a expectativa é que esta variação possa interferir no resultado. Então, arbitrou-se o valor de 0,5 por se acreditar como sendo uma posição mais neutra. Entretanto, na etapa seguinte do trabalho será explorada a variação neste valor arbitrado para que se possa confirmar o esperado em relação a suas implicações no modelo.

Tabela 6: Projetos da carta de controle com instâncias D1, D10, P3 e P4

Parâmetros	Instâncias [Assimetria + (p=2,q=4)]			
	D1	D10	P3	P4
a_1	0,5	0,5	5	0,5
a_2	0,1	0,1	1	0,1
a_3	25	250	250	35
σ_{a_3}	2,5	2,5	2,5	2,5
a_4	50	500	50	500
a_5	100	100	50	100
σ_{a_5}	10	10	10	10
λ	0,01	0,01	0,01	0,01
g	0,05	0,05	0,05	0,05
D	2	2	3	3
$\bar{\Delta}$	0,33	0,33	0,33	0,33
$\sigma_{\bar{\Delta}}$	0,178	0,178	0,178	0,178
ρa_3	0,5	0,5	0,5	0,5
ρa_5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5

p,q- Parâmetros da Distribuição Beta para a variável δ .

Parâmetro δ variando na amplitude [0,5; 3,5]

Como parâmetros de assimetria da distribuição Beta para a variável δ , serão considerados somente os valores da assimetria a direita ($p=2$, $q=4$), que são variações de pequena magnitude e mais frequentes, com δ menores, para demonstrar a funcionalidade do método e para que possam ser comparados aos resultados de Vommi e Kasarapu (2014). Como definido na seção de delimitações, o modelo não será replicado para todos os parâmetros de assimetria. O parâmetro δ assume-se com variação de 0,5 a 3,5, para garantir comparabilidade do método, sendo estes os mesmos valores utilizados por Vommi e Kasarapu (2014).

As instâncias escolhidas para análise foram $D1$, $D10$, $P3$ e $P4$, escolhidas por ter valores que destoam umas das outras, e utilizadas por Vommi e Kasarapu (2014). Foram escolhidas para comparação com os resultados obtidos pelos autores. Note que Vommi e Kasarapu (2014) obtiveram as instâncias $D1$ e $D10$ de exemplos de estudo de Duncan (1956) e $P3$ e $P4$ obtidas de Panagos, Heikes e Montgomery (1985).

O processo de otimização por metaheurística, por não garantir o resultado ótimo, mas um resultado próximo a ele, exige a repetição do procedimento de otimização para obtenção de valores com precisão estatística (PEREIRA, 2013). Foram efetuadas 30 replicações para cada instância, no intuito de tentar obter valores próximos ao ótimo local e estes resultados serão então apresentados e discutidos posteriormente. Percebam que o cálculo amostral apresentado para validação do algoritmo foi definido como 36 repetições, e foi possível executá-lo com os recursos computacionais disponíveis pelo fato da formulação matemática do modelo do Duncan utilizado na validação do algoritmo ser simplificado. Quando se aumentou a complexidade da função objetivo, aumentou a complexidade do procedimento, sendo inviável obter aquele número de repetições num tempo computacional hábil para a execução do trabalho nos prazos estabelecidos.

Para a execução do trabalho, foi utilizado um computador com processador Intel(R) Core(TM) 2 Duo CPU, com memória instalada (RAM) de 3GB. Para rodar cada combinação das instâncias com apenas 30 repetições, o processo estava levando aproximadamente 140 horas. No início do trabalho, tentou-se rodar com 36 repetições, que foi o número de tamanho de amostra encontrado como o necessário, porém o processo rodou por mais de 140 horas e o procedimento foi interrompido por falta de memória, reduzindo-se assim o número de repetições para que o processo se tornasse viável com os recursos computacionais disponíveis.

4.3 Resultados da otimização

Através da aplicação do algoritmo de otimização *Simulated Annealing* nas instâncias selecionadas, foram extraídos os resultados que são apresentados e comparados com os obtidos a partir dos hiper-parâmetros ótimos obtidos por Vommi e Kasarapu (2014) na Tabela 7.

A Tabela 7 apresenta os resultados para as instâncias $D1$, $D10$, $P3$ e $P4$. Além disso, ela mostra os valores ótimos para os parâmetros de operação da carta n , h e k , além do custo esperado para o modelo proposto e a partir dos valores ótimos obtidos por Vommi e Kasarapu

Tabela 7: Comparação instâncias D1, D10, P3 e P4

Parâmetros	Assimetria + (p=2,q=4)							
	D1		D10		P3		P4	
	SA	VK	SA	VK	SA	VK	SA	VK
n	17,0	9,0	9,0	14,0	5,0	6,0	2,0	14,0
h	27,6	1,5	3,7	1,8	9,5	7,0	1,2	1,8
k	1,3	2,6	2,3	3,3	1,4	1,8	4,9	3,3
$E(L)$	2167,26	670,61	1380,90	1041,50	1168,10	1120,10	630,53	880,23

SA,VK- parâmetros n, h e k obtidos pelo *Simulated Anenaling* e aplicado aos valores ótimos de Vommi e Kasarapu (2014), respectivamente.

p,q- Parâmetros da Distribuição Beta para a variável δ .

Parâmetro δ variando na amplitude [0,5; 3,5]

(2014). Deste modo, na instância D1 o algoritmo *Simulated Annealing* (a) obteve como parâmetros de operação da carta $n=17$, $h=27,6$ e $k=1,3$, ou seja, um tamanho de amostra igual a 17, coletado a cada 27,6 horas e considerando um valor de parâmetro de limite de controle igual a 1,3. Com esta configuração, a operação do CEP tem um custo médio esperado a partir do modelo proposto de \$2167,26 por hora. Para a mesma instância, os valores ótimos de Vommi e Kasarapu (2014) são de $n=9$, $h=1,5$ e $k=2,6$, estes valores ótimos obtidos por Vommi e Kasarapu (2014) no modelo proposto por eles, quando aplicado ao modelo aqui proposto gerou um custo esperado por hora de 670,61.

O procedimento proposto obteve valores de custo esperado próximos aos valores obtidos com os parâmetros de operação da carta de Vommi e Kasarapu (2014) nas instâncias D10 e P3. Note que o único caso em que o custo esperado obtido pelo *Simulated Annealing* foi menor (melhor) em comparação ao custo obtido com os parâmetros do Vommi e Kasarapu (2014) foi na instância P4, onde o que destaca-se é uma combinação do custo da determinação de uma causa atribuível (a_3), com valor relativamente baixo, com o custo de investigação de um alarme falso (a_4), com valor relativamente alto em comparação aos outros modelos. É possível que esta combinação tenha gerado uma condição mais favorável ao algoritmo, mas isto precisa ser confirmado com novas rodadas de simulação, aprimoramento do algoritmo, a fim de se identificar efetivamente porque o algoritmo *Simulated Annealing* em uma das instâncias testadas conseguiu efetivamente obter um resultado melhor.

Os resultados mostram que quando comparamos os resultados obtidos pelo processo de otimização através do algoritmo do *simulated annealing* com os valores da função objetivo aplicados nos parâmetros obtidos por Vommi e Kasarapu (2014), os resultados de custo ótimo encontrados pelo método proposto foram maiores que os resultados encontrados por Vommi e Kasarapu (2014) nas mesmas instâncias, possivelmente devido as incertezas incluídas no modelo ou porque os parâmetros de controle n , h e k são diferentes.

Os resultados do *simulated annealing* de fato poderiam ser piores, como demonstram Rajab (2012), pois métodos de buscas populacional podem explorar um espaço maior de soluções e

com isso tem a possibilidade de fugir de ótimos locais ou de não aceitar soluções piores, o que não ocorre nos algoritmos de busca por trajetória, que é o caso do *simulated annealing*.

Os resultados demonstram que a escolha do método de otimização interfere no resultado, sendo que o *simulated annealing*, da forma como foi configurado, não conseguiu se aproximar de mínimos da função objetivo. Isto pode ser observado quando se aplicam os valores de Vommi e Kasarapu (2014) na função objetivo proposta, onde os resultados da função são significativamente menores, como foram apresentados na Tabela 7.

4.4 Validação do modelo

Para avaliação do modelo em si, foi efetuada variação nos parâmetros σ_{a_3} , σ_{a_5} , δ , e posteriormente nos valores de ρ_{a_3} e ρ_{a_5} pois esperava-se que com o aumento da variabilidade se aumentassem os custos. Esperava-se que quanto maior fosse a incerteza, maior seria o resultado do custo ótimo do processo, e conseqüentemente, quanto menos incertezas no processo, menor valor esperava-se para o custo de operação, o que acabou se comprovando.

Foram analisados os pontos de similaridade e diferença com os resultados obtidos por Vommi e Kasarapu (2014). Após, foram fixados os valores de n , h e k , e variou-se os valores de δ (parâmetro de deslocamento do processo) entre 0,5 e 3,5 e os valores de σ_{a_3} (desvio padrão do custo a_3) e de σ_{a_5} (desvio padrão do custo a_5). Os valores de δ foram fixados neste intervalo de variação pois foram os valores indicados por Vommi e Kasarapu (2014). Os valores σ_{a_3} e σ_{a_5} sofreram variação pois eles representam os níveis de incerteza do operador em relação aos valores informados dos custos de operação a_3 e a_5 , e dependem dos valores a_3 e a_5 definidos.

Estabeleceu-se ainda que ρ_{a_3} tem valor positivo, pois quanto maior for o desvio em relação ao alvo, espera-se que maior seja o custo esperado de operação. Da mesma forma estabeleceu-se para ρ_{a_5} um valor negativo, pois espera-se que quanto maior for o desvio em relação ao alvo, menor seja o custo esperado de operação. Definiu-se também ambos como 0,5 em módulo, ou seja a dependência entre δ , e o custo a_3 ou a_5 foi arbitrada como sendo moderada. Aplicou-se o modelo de otimização e resultados de custo foram obtidos, e com isso, uma vez efetuadas repetições neste procedimento puderam ser efetuadas as primeiras análises.

Em um segundo momento, fixaram-se os valores de σ_{a_3} e σ_{a_5} . Os valores de δ continuaram variando juntamente com os valores de ρ_{a_3} e ρ_{a_5} . Optou-se por variar os valores de ρ pois espera-se que quanto maior for a correlação, maior seja a dependência do custo em relação ao valor de δ e portanto, com maior dependência, o custo esperado de operação seja menor.

Com relação aos parâmetros σ e ρ que indicam a variabilidade associada aos custos, ou seja, a incerteza associada ao custo e a intensidade da correlação entre o tamanho do desvio e a variação no custo, a Tabela 8 apresenta os resultados para a instância D1, fixando todos os parâmetros e variando estas entradas do modelo. Percebe-se que conforme se aumenta a incerteza em relação aos custos (σ_{a_3} e σ_{a_5}), maior é o resultado do custo ótimo. Adotou-se o intervalo de

σ_{a_3} entre 0,25 e 2,5 e σ_{a_5} entre 1,0 e 10,0 pois representam um coeficiente de variação de até 10% do valor do custo, o que parece razoável para este tipo de aplicação. Já quando aplica-se variações em ρ_{a_3} e ρ_{a_5} (correlação entre o δ e o a_3 e δ e o a_5 , respectivamente) percebe-se que o custo ótimo diminui a medida que aumentamos a força da correlação, conforme era esperado.

Tabela 8: Instâncias com incerteza de custos e dependência variável

Parâmetros	Assimetria + (p=2,q=4)				Assimetria + (p=2,q=4)		
a_1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
a_2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
a_3	25	25	25	25	25	25	25
σ_{a_3}	0,25	0,5	1,0	2,5	2,5	2,5	2,5
a_4	50	50	50	50	50	50	50
a_5	100	100	100	100	100	100	100
σ_{a_5}	1	2	4	10	10	10	10
λ	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
g	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
D	2	2	2	2	2	2	2
$\bar{\delta}$	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33
$\sigma_{\bar{\delta}}$	0,178	0,178	0,178	0,178	0,178	0,178	0,178
ρ_{a_3}	0,5	0,5	0,5	0,5	0,2	0,5	0,8
ρ_{a_5}	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,2	-0,5	-0,8
n	5,0	5,0	5,0	5,0	2,0	2,0	2,0
h	1,6	1,6	1,6	1,6	1,2	1,0	1,0
k	2,6	2,6	2,6	2,6	5,0	4,1	4,1
$E(L)$	15,54	159,84	532,20	638,09	805,90	498,88	133,68

Instância D1 de Vommi e Kasarapu (2014) - Instância D1.

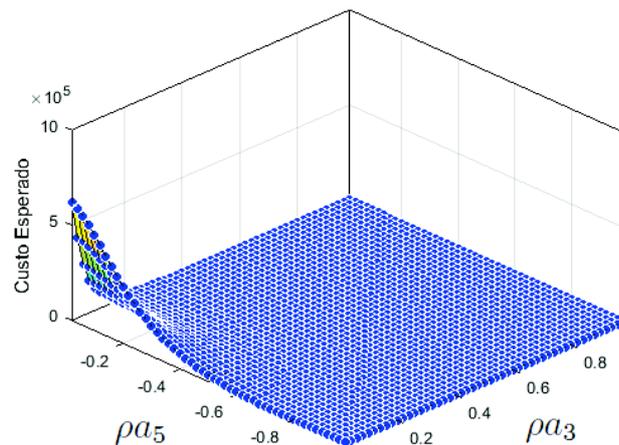
p,q- Parâmetros da Distribuição Beta para a variável δ .

Parâmetro δ variando na amplitude [0,5; 3,5]

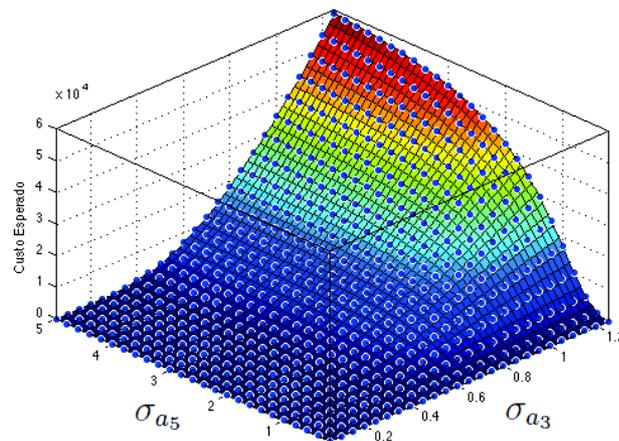
Os dados da Tabela 8 apresentam os parâmetros da instância D1 de Vommi e Kasarapu (2014) para parâmetros da distribuição Beta para a variável δ de assimetria p=2 e q=4, onde os parâmetros a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , λ , g , $\bar{\delta}$ e $\sigma_{\bar{\delta}}$ são todos da instância D1. O modelo prevê que os custos também são considerados como variável aleatória, e mais do que isso, as variâncias dos custos a_3 e a_5 são definidas para poder considerar estes custos como variáveis aleatórias. Também, a relação de dependência entre estes custos e o desvio, medido através do coeficiente de correlação entre os desvios e os custos, como explicado na proposição do modelo, foram definidos aqui.

Na primeira parte da tabela, colunas 2 a 5, se objetivou efetuar o incremento na variabilidade dos custos, mantendo fixos os valores de ρ , enquanto que na segunda parte da tabela, colunas 6 a 8, manteve-se fixa a variabilidade dos custos e buscou-se variar apenas os valores de ρ . Com isto, verificou-se que no caso de um valor de ρ moderado igual a $\pm 0,5$, e nos menores valores de variabilidade dos custos, $\sigma_{a_3}=0,25$ e $\sigma_{a_5}=1$, obteve-se um custo relativamente inferior quando comparado com o custo médio por hora esperado de operação do CEP com aumento desta variabilidade, mantendo fixo o nível de dependência entre o ρ e o σ . Estes resultados corroboram

com o que é descrito na literatura, por exemplo, Linderman e Choo (2002); Mortarino (2010); Safaei, Kazemzadeh e Gan (2015) que discutem que as incertezas em relação aos custos de operação impactam de alguma forma nestes custos. De mesmo modo, era esperado que conforme aumenta-se o valor de ρ , em módulo, o custo diminui, pois se tem mais precisão em relação a dependência do custo ao tamanho do desvio δ . Os resultados confirmam estas hipóteses. As Figuras 6(a) e 6(b) apresentam a análise onde foi utilizado um grid mais fino para obtenção de valores do custo esperado do que os apresentado na Tabela 8.



(a) Variação de ρ_{a_3} e ρ_{a_5}



(b) Variação de σ_{a_3} e σ_{a_5}

Figura 6: Análise do custo esperado do modelo proposto

Para a construção da Figura 6(a), variação do ρ , considerou-se uma variação do ρ_{a_3} com intervalo de 0 a 1, o ρ_{a_5} com intervalo de -1 a 0, com incrementos de 0,02. Cada ponto da figura representa o custo esperado para os parâmetros da função da instância D1 de Vommi e Kasarapu (2014), considerando o σ_{a_3} fixo em 2,5 e o σ_{a_5} fixo em 10,0.

Já na Figura 6(b), fixou-se o valor de ρ_{a_3} em 0,5 e ρ_{a_5} em -0,5 e variou-se o valor de σ_{a_3} de

0 a 1,2, com incremento de 0,025 e σ_{a_5} de 0 a 5,0 com incremento de 0,1. Cada ponto da figura, representa então o custo esperado para os parâmetros da função da instância D1 de Vommi e Kasarapu (2014) nesta condição. Em função das grandezas dos custos, entendeu-se que não se fazia sentido fazer um intervalo de variação do mesmo tamanho mas sim com uma amplitude proporcional ao tamanho do valor.

A Figura 6(a) mostra que quando se tem uma correlação baixa, valores abaixo de aproximadamente 0,4, entre ρ_{a_3} e ρ_{a_5} , o custo esperado tem um aumento significativo. Quanto menor for a associação entre o tamanho do desvio e o custo, maior será o custo esperado, aumentando assim o intervalo de variação deste custo em função dele não estar associado ao tamanho do δ . Observa-se que para correlações mais fortes que aproximadamente 0,4, positivas ou negativas, este custo converge para o valor do custo ótimo, ou seja, se o nível de confiança sobre a associação entre o tamanho do desvio e o custo for maior do que 0,4, este não é um critério que necessariamente precise ser considerado na análise.

Já considerando-se a variabilidade, verificou-se que para valores maiores do que aproximadamente 0,6 para σ_{a_3} e aproximadamente 2,0 para σ_{a_5} , os custos tem um aumento considerável. Verificou-se também em alguns testes que para valores maiores do que os observados, o comportamento desta função objetivo passa a ter um comportamento errático, onde não se pode afirmar se é em função do algoritmo de otimização ou em função do valor muito elevado de incerteza. Este detalhe carece de maior investigação futura.

Entre os custos associados ao controle de processos, Michel (2001) aponta os custos de amostragem e medição e os custos associados à correção e produção não conforme. Dentre eles, destacam-se os custos de investigação de alarmes falsos ou os devidos à não detecção de itens não conformes produzidos. Conforme Safaei, Kazemzadeh e Gan (2015), estes custos são difíceis de mensurar e essa incerteza pode gerar estimativas equivocadas quanto ao custo total esperado de operação do CEP. Verificou-se que o incremento da incerteza e de uma associação não muito forte com os custos e o δ interfere no valor dos custos esperados, onde quanto maior for a incerteza, maior será o custo, como é suposto pelos autores. Vommi e Seetala (2007) construíram um modelo para otimização das cartas de controle onde utilizavam como base o modelo de Duncan, mas consideravam que os custos variavam em função do δ e faziam uma média ponderada para obter um valor de custo médio ponderado. Já Vommi e Kasarapu (2014) afirmavam que a influência do custo não é tão significativa quanto o fato de se tratar o δ discreto e que portanto o δ deveria ser tratado de modo contínuo. Entretanto, existem processos industriais ou não industriais, em que o valor do δ pode sim impactar no valor dos custos. Por exemplo, num processo produtivo de fundição, Lorenzen e Vance (1986) aplicaram uma análise de sensibilidade na carta de controle e concluem que as incertezas influenciam no custo total do processo.

Como os valores destes custos são dinâmicos (LINDERMAN; CHOO, 2002), a estratégia de tratá-los como variáveis aleatórias assumindo um comportamento conhecido é uma estratégia a ser adotada. Este foi o principal motivador deste trabalho. Os resultados demonstraram que:

- i. dependendo do nível de dependência entre o δ e o custo, e
- ii. da incerteza que se tem no custo, medido através da variabilidade do custo (σ_{a_3} e σ_{a_5}),

as incertezas quanto aos valores definidos de custo de operação do CEP impactam nos custos totais de operação do CEP, como demonstrado nos resultados. O modelo proposto nesta pesquisa leva estes aspectos em consideração pois existem processos produtivos onde estes custos, ao contrário do que pregam Vommi e Kasarapu (2014), devem ser considerados na modelagem do custo de operação do CEP.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em geral, trabalhos de otimização focam no desenvolvimento de formulações alternativas para problemas ou na melhoria de algoritmos de otimização. Esta pesquisa teve o propósito de estudar a influência da incerteza na estimação dos custos na função de otimização econômica, portanto foca no desenvolvimento de uma formulação alternativa para o problema de otimização econômica da carta de controle \bar{X} . A pesquisa buscou responder a pergunta de pesquisa “Como otimizar a carta de controle \bar{X} considerando custos variáveis e dependentes do desvio em relação à média do processo?”. A resposta a esta pergunta contribui para o atual estado-da-arte ao trazer uma abordagem alternativa às formulações do problema de otimização econômica.

A questão de pesquisa direciona o foco do trabalho para trabalhos de otimização que visam gerar uma formulação alternativa para o problema de otimização econômica de cartas de controle. A pergunta de pesquisa indica o objetivo principal, descrito como segue: “propor um modelo de otimização econômica para a carta de controle \bar{X} que considere as incertezas em relação aos custos variáveis e dependentes do desvio em relação à média do processo”.

A partir do levantamento de referencial teórico em busca de artigos que apresentassem componentes variáveis em sua formulação, conseguiu-se atender ao primeiro objetivo específico, de identificar estratégias de otimização econômica que apresentem componentes variáveis em sua formulação para execução deste trabalho. Como resultado desta etapa, se identificou como principais trabalhos referentes ao assunto tratado nesta dissertação os publicados por Vommi e Seetala (2007) e Vommi e Kasarapu (2014). A partir do estudo destes trabalhos, verificou-se que Vommi e Seetala (2007) tratavam os custos e o parâmetro de mudança de processo (δ) como variáveis discretas, sugerindo que ambos eram impactantes nos custos de operação do CEP. Já no artigo de Vommi e Kasarapu (2014), os autores contradizem o que havia sido dito anteriormente por um deles, afirmando que os custos não devem ser considerados relevantes na análise do modelo, considerando apenas o parâmetro de mudança no nível do processo (δ) como uma variável. No contexto, os autores definiram δ como uma variável aleatória com distribuição de probabilidade dado pelo modelo contínuo Beta.

Foram estudados os critérios utilizados por estes autores em seus trabalhos e, após, foram selecionadas algumas instâncias para posterior aplicação ao modelo, e com isto pode-se propor o método *Simulated Annealing* que foi apresentado no capítulo 3. Uma vez proposto o método, este foi avaliado em relação às instâncias D1, D10, P3 e P4 obtidas de Vommi e Kasarapu (2014), sendo estas instâncias selecionadas analisadas. Optou-se pela aplicação do *Simulated Annealing* como método de otimização.

A literatura aponta que é esperado que algoritmos populacionais apresentem resultados melhores. Ao verificar a obtenção dos resultados a partir de algoritmos de busca em trajetória identificou-se que efetivamente os algoritmos em trajetória não conseguiram atingir resultados similares a resultados possíveis e avaliados como os obtidos com os parâmetros ótimos obtidos por Vommi e Kasarapu (2014). Rajab (2012) demonstra que algoritmos populacionais ou de

estratégias de hibridização podem conseguir melhores resultados devido ao processo de busca por regiões promissoras no espaço de soluções terem uma maior amplitude de busca.

O trabalho apresenta uma modelagem que utiliza os custos como variáveis aleatórias dependentes do tamanho do desvio e com indicadores de incerteza associados. Os resultados mostraram que variações nos parâmetros introduzidos neste modelo comportam-se como o esperado, isto é, é razoável imaginar que com o aumento da incerteza sobre o custo tenha-se maiores erros e, portanto um custo médio esperado de operação maior. Do mesmo modo espera-se que um nível de dependência fraco aumentará o impacto da variabilidade dos custos e por consequência terá um custo esperado maior também, o que foi demonstrado nos resultados.

O trabalho limitou-se a um número de replicações menor do que o que havia sido proposto por motivo de limitações computacionais, e isto na verdade é um aspecto que precisa futuramente ser revisitado a fim de que se execute um maior número de replicações e se obtenha resultados com uma precisão estatística maior. Algumas possibilidades de pesquisas futuras são sugeridas, entre elas:

- o desenvolvimento de algoritmos de otimização que sejam capazes de lidar com integrais triplas buscando resultados ótimos de forma mais rápida e consistente;
- estudar porque a variação para os valores de σ_{a_3} e σ_{a_5} acima dos valores aplicados nesta dissertação geraram resultados inconsistentes com o que se espera;
- replicar o trabalho com outros algoritmos para que se possa atingir melhor resultados que os obtidos com o *Simulated Annealing*;
- verificar o desempenho do otimizador com algoritmos do tipo populacionais ou os com estratégia de hibridização.

Por fim, formulações que otimizem o problema de operação da carta de controle não apenas sob o ponto de vista econômico, mas também estatístico, pode ser abordado considerando as entradas de custo como variáveis aleatórias em estudos futuros.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, S. M.; DILLMAN, M. A.; USHER, J. S.; DAMODARAN, B. Economic design of control charts using the Taguchi loss function. **Computers & industrial engineering**, v. 28, n. 3, p. 671–679, 1995.
- AMIRI, A.; MOGHADDAM, A. S.; AGHABABAEI, Z. Robust economic-statistical design of multivariate exponentially weighted moving average control chart under uncertainty with interval data. **Scientia Iranica**, v. 22, n. 3, p. 1189–1202, 2015.
- AMIRI, A.; MOSLEMI, A.; DOROUDYAN, M. H. Robust economic and economic-statistical design of EWMA control chart. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 78, n. 1-4, p. 511–523, 2015.
- APARISI, F.; GARCÍA-BUSTOS, S.; EPPRECHT, E. K. Optimum multiple and multivariate Poisson statistical control charts. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 30, n. 2, p. 221–234, 2014.
- APARISI, F.; LUNA, M. A. de; EPPRECHT, E. Optimisation of a set of or principal components control charts using genetic algorithms. **International Journal of Production Research**, v. 48, n. 18, p. 5345–5361, 2010.
- BASHIRI, M.; AMIRI, A.; DOROUDYAN, M. H.; ASGARI, A. Multi-objective genetic algorithm for economic statistical design of control chart. **Scientia Iranica**, v. 20, n. 3, p. 909–918, 2013.
- BIPM, I.; IFCC, I.; IUPAC, I. OIML 1995 Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. **ISO, Geneva**, v. 3, 1995.
- CAUCHICK, P. A. C.; FLEURY, A. C. C. **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações**. Ed. Paulo Augusto Cauchick Cauchick, 2012.
- ČERNÝ, V. Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: an efficient simulation algorithm. **Journal of optimization theory and applications**, v. 45, n. 1, p. 41–51, 1985.
- CHANG, S.; PENG, T. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 17, n. 4, p. 474–483, 1972.
- CHEW, X.; KHOO, M. B.; TEH, S.; CASTAGLIOLA, P. The variable sampling interval run sum control chart. **Computers & Industrial Engineering**, v. 90, p. 25–38, 2015.
- CHIBANTE, R. (Ed.). **Simulated Annealing, Theory with Applications**. Sciyo., 2010.
- CHOU, C.-Y.; CHEN, C.-H.; LIU, H.-R. Economic design of EWMA charts with variable sampling intervals. **Quality and Quantity**, v. 40, n. 6, p. 879–896, 2006.
- COLLINS, G.; JIBAWI, A.; MCCULLOCH, P. Control chart methods for monitoring surgical performance: a case study from gastro-oesophageal surgery. **European Journal of Surgical Oncology (EJSO)**, v. 37, n. 6, p. 473–480, 2011.

- CORTÊS, I. R. **Custos da qualidade como ferramenta de decisão**. XXI Encontro Nacional de Engenharia de Produção–ENEGEP. Salvador, BA, 2001.
- COSTA, A. F.; CASTAGLIOLA, P. Effect of measurement error and autocorrelation on the X chart. **Journal of Applied Statistics**, v. 38, n. 4, p. 661–673, 2011.
- COSTA QUININO, R. da; HO, L. L.; TRINDADE, A. L. G. Estimation in X-bar control charts: effects and corrections. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 72, n. 1-4, p. 101–106, 2014.
- DAL CORTIVO, Z.; NETO, A. C.; CHAVES, I. A. Planejamento econômico de Baker em cartas de controle e a função perda de Taguchi. **RECEN-Revista Ciências Exatas e Naturais**, v. 10, n. 1, p. 63–76, 2010.
- DUNCAN, A. J. The economic design of X charts used to maintain current control of a process. **Journal of the American Statistical Association**, v. 51, n. 274, p. 228–242, 1956.
- FARAZ, A.; KAZEMZADEH, R.; HEUCHENNE, C.; SANIGA, E. The Optimal Design of the VSI T2 Control Chart. **Journal of Iranian Statistical Society**, v. 9, n. 1, p. 1–19, 2010.
- FAUL, F.; ERDFELDER, E.; LANG, A.-G.; BUCHNER, A. G* Power 3: a flexible statistical power analysis program for the social, behavioral, and biomedical sciences. **Behavior research methods**, v. 39, n. 2, p. 175–191, 2007.
- FRANCO, B. C.; CELANO, G.; CASTAGLIOLA, P.; COSTA, A. F. B. Economic design of Shewhart control charts for monitoring autocorrelated data with skip sampling strategies. **International Journal of Production Economics**, v. 151, p. 121–130, 2014.
- FRANCO, B.; COSTA, A. F.; MACHADO, M. A. Economic-statistical design of the chart used to control a wandering process mean using genetic algorithm. **Expert Systems with Applications**, v. 39, n. 17, p. 12961–12967, 2012.
- GANGULY, A.; PATEL, S. Economic Design of Control Chart Using Simulated Annealing. **Procedia Engineering**, v. 38, p. 1037–1043, 2012.
- GASPAR-CUNHA, A.; TAKAHASHI, R.; ANTUNES, C. H. **Manual de computação evolutiva e metaheurística**. Imprensa da Universidade de Coimbra/Coimbra University Press, 2012.
- GENDREAU, M.; POTVIN, J.-Y. **Handbook of metaheuristics**. Springer, 2010. v. 2.
- GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. São Paulo: atlas, 1996. **Métodos e técnicas de pesquisa social**, v. 5, 1995.
- GIRSHICK, M. A.; RUBIN, H. A Bayes approach to a quality control model. **The Annals of mathematical statistics**, p. 114–125, 1952.
- GUO, Z.-F.; CHENG, L.-S.; LU, Z.-D. Economic Design of the Variable Parameters \bar{X} Control Chart with a Corrected A&L Switching Rule. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 30, n. 2, p. 235–246, 2014.

- JALALI, S.; WOHLIN, C. Systematic literature studies: database searches vs. backward snowballing. In: ACM-IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON EMPIRICAL SOFTWARE ENGINEERING AND MEASUREMENT, 2012. **Proceedings...** 2012. p. 29–38.
- KASARAPU, R. V.; VOMMI, V. B. Economic Design of \bar{X} Control Chart Using Differential Evolution. **International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering**, v. 3, n. 4, p. 541–548, 2013.
- KEATS, J. B.; DEL CASTILLO, E.; VON COLLANI, E.; SANIGA, E. M. Economic modeling for statistical process control. **Journal of Quality Technology**, v. 29, n. 2, p. 144, 1997.
- KIRKPATRICK, S.; VECCHI, M. P. et al. Optimization by simulated annealing. **science**, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983.
- KORST, A. **Simulated annealing and boltzmann machines. A stochastic approach to combinatorial optimization and neural computing**. New York John Wiley, 1990.
- KORZENOWSKI, A.; VIDOR, G.; VACCARO, G.; TEN CATEN, C. Control charts for flexible and multi-variety production systems. **Computers & Industrial Engineering**, v. 88, p. 284–292, 2015.
- LINDERMAN, K.; CHOO, A. S. Robust economic control chart design. **IIE transactions**, v. 34, n. 12, p. 1069–1078, 2002.
- LORENZEN, T. J.; VANCE, L. C. The economic design of control charts: a unified approach. **Technometrics**, v. 28, n. 1, p. 3–10, 1986.
- MAGALHAES, M. S. D.; COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K. Constrained optimization model for the design of an adaptive X chart. **International Journal of Production Research**, v. 40, n. 13, p. 3199–3218, 2002.
- METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A. W.; ROSENBLUTH, M. N.; TELLER, A. H.; TELLER, E. Equation of state calculations by fast computing machines. **The journal of chemical physics**, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, 1953.
- MICHALEWICZ, Z.; FOGEL, D. B. **How to solve it: modern heuristics**. Springer Science & Business Media, 2013.
- MICHEL, R. **Cartas adaptativas de controle: desenvolvimento de metodologia para implementação em processos de manufatura**. 2001. Dissertação de Mestrado — Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.
- MICHEL, R.; FOGLIATTO, F. A. S. Projeto econômico de cartas adaptativas para monitoramento de processos. **Gestão & Produção**, v. 9, n. 1, p. 17 – 31, 04 2002.
- MOHAMMADIAN, F.; AMIRI, A. Economic-Statistical Design of Acceptance Control Chart. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 29, n. 1, p. 53–61, 2013.
- MONTGOMERY, D. C. ECONOMIC DESIGN OF AN X CONTROL CHART. **Journal of Quality Technology**, v. 14, n. 1, p. 40–43, 1983.

MONTGOMERY, D. C.; FARIAS, A. M. L. de. **Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade**. Gen, 2009.

MORTARINO, C. Duncan's model for \bar{X} -control charts: sensitivity analysis to input parameters. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 26, n. 1, p. 17–26, 2010.

NORDSTRÖM, F.; AF WETTERSTEDT, S.; JOHNSON, S.; CEBERG, C.; BÄCK, S. A. Control chart analysis of data from a multicenter monitor unit verification study. **Radiotherapy and Oncology**, v. 102, n. 3, p. 364–370, 2012.

OLIVEIRA, C. C. de; GRANATO, D.; CARUSO, M. S. F.; SAKUMA, A. Manual para elaboração de cartas de controle para monitoramento de processos de medição quantitativos em laboratórios de ensaio. **Instituto Adolfo Lutz, 1ª edição, São Paulo**, 2013.

PAN, E.; JIN, Y.; WANG, Y. Integration of economic production quantity in optimization design of control chart based on loss function and random process shift. **Journal of Manufacturing Technology Management**, v. 22, n. 7, p. 929–946, 2011.

PANAGOS, M. R.; HEIKES, R. G.; MONTGOMERY, D. C. Economic design of X control charts for two manufacturing process models. **Naval Research Logistics Quarterly**, v. 32, n. 4, p. 631–646, 1985.

PEDREGAL, P. **Introduction to Optimization**. Springer Science & Business Media, 2006. v. 46.

PEREIRA, F. J. B. Algoritmo Genético. In: **Manual de Computação evolutiva e metaheurísticas**. Belo Horizonte Editora UFMG, 2013.

PIGNATIELLO JR, J. J.; TSAI, A. Optimal economic design of X-control charts when cost model parameters are not precisely known. **IIE Transactions**, v. 20, n. 1, p. 103–110, 1988.

RAIDL, G. R. A unified view on hybrid metaheuristics. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON HYBRID METAHEURISTICS, 2006. **Anais...** 2006. p. 1–12.

RAJAB, R. S. **Some Applications of Continuous Variable Neighbourhood Search Metaheuristic (mathematical Modelling)**. 2012. Tese de Doutorado — Brunel University, 2012.

SAFAEI, A. S.; KAZEMZADEH, R. B.; GAN, H.-S. Robust economic-statistical design of X-bar control chart. **International Journal of Production Research**, n. ahead-of-print, p. 1–13, 2015.

SANIGA, E. M. Economic Design of Control Charts. **Wiley StatsRef: Statistics Reference Online**, 2014.

SHEWHART, W. A. Quality Control Charts1. **Bell System Technical Journal**, v. 5, n. 4, p. 593–603, 1926.

SMETI, E.; THANASOULIAS, N.; KOUSOURIS, L.; TZOUMERKAS, P. An approach for the application of statistical process control techniques for quality improvement of treated water. **Desalination**, v. 213, n. 1, p. 273–281, 2007.

SOARES, S.; ANTUNES, C. H.; ARAÚJO, R. Comparison of a genetic algorithm and simulated annealing for automatic neural network ensemble development. **Neurocomputing**, v. 121, p. 498–511, 2013.

SULTANA, I.; AHMED, I.; CHOWDHURY, A. H.; PAUL, S. K. Economic design of control chart using genetic algorithm and simulated annealing algorithm. **International Journal of Productivity and Quality Management**, v. 14, n. 3, p. 352–372, 2014.

TALBI, E.-G. **Metaheuristics: from design to implementation**. John Wiley & Sons, 2009. v. 74.

VACCARO, G.; KORZENOWSKI, A. **Towards an Overall Equipment Effectiveness Control Chart: the oee/teep cc**. unpublished.

VOMMI, V.; KASARAPU, R. V. Economic design of \bar{X} control charts considering process shift distributions. **Journal of Industrial Engineering International**, v. 10, n. 4, p. 163–171, 2014.

VOMMI, V.; SEETALA, S. A simple approach for robust economic design of control charts. **Computers & Operations Research**, v. 34, n. 7, p. 2001–2009, 2007.

WOODALL, W. H. The statistical design of quality control charts. **The Statistician**, p. 155–160, 1985.

WOODALL, W. H.; MONTGOMERY, D. C. Some current directions in the theory and application of statistical process monitoring. **Journal of Quality Technology**, v. 46, n. 1, p. 78, 2014.

WU, Z.; SHAMSUZZAMAN, M.; PAN, E. Optimization design of control charts based on Taguchi's loss function and random process shifts. **International Journal of Production Research**, v. 42, n. 2, p. 379–390, 2004.

YU, F.-j.; HOU, J.-l. Optimization of design parameters for control charts with multiple assignable causes. **Journal of Applied Statistics**, v. 33, n. 3, p. 279–290, 2006.

YU, F.-J.; TSOU, C.-S.; HUANG, K.-I.; WU, Z. An economic-statistical design of \bar{x} control charts with multiple assignable causes. **Journal of Quality**, v. 17, n. 4, p. 327, 2010.

ZHANG, M.; NIE, G.; HE, Z. Performance of cumulative count of conforming chart of variable sampling intervals with estimated control limits. **International Journal of Production Economics**, v. 150, p. 114–124, 2014.