

UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS — UNISINOS
UNIDADE ACADÊMICA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS CONTÁBEIS
NÍVEL MESTRADO

GREGORIO CECCONELLO

OS DETERMINANTES DAS DIFERENÇAS ENTRE VOLATILIDADES IMPLÍCITAS
DAS OPÇÕES NO BRASIL

PORTO ALEGRE-RS
2021

Gregorio Cecconello

OS DETERMINANTES DAS DIFERENÇAS ENTRE VOLATILIDADES IMPLÍCITAS
DAS OPÇÕES NO BRASIL

Dissertação apresentada como requisito
parcial à qualificação de Mestrado pelo
Programa de Pós-Graduação em Ciências
Contábeis da Universidade do Vale do Rio dos
Sinos — UNISINOS

Orientador:
Prof. Dr. Roberto Decourt

Co-orientador:
Prof. Dr. Daniel Vancin

Porto Alegre-RS
2021

C387d Ceconello, Gregorio.
Os determinantes das diferenças entre volatilidades implícitas das opções no Brasil / Gregorio Ceconello. – 2021.
66 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Programa de Pós-Graduação em Ciências Contábeis, 2021.
“Orientador: Prof. Dr. Roberto Decourt
Co-orientador: Prof. Dr. Daniel Vancin.”

1. Modelo de Black e Scholes. 2. Volatilidade implícita.
3. Opções. 4. Liquidez. I. Título.

CDU 657

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Bibliotecária: Amanda Schuster – CRB 10/2517)

*Only a crisis, actual or perceived,
produces real change.*
— MILTON FRIEDMAN

AGRADECIMENTOS

A todos que, ao longo desta jornada, foram processo catalisador de transformação positiva em minha trajetória acadêmica, em especial: ao professor Roberto Decourt, pela confiança desde o primeiro dia de mestrado, pelas orientações assertivas e paciência durante estes anos; ao professor Daniel Vancin, cujos esforços em contribuir ao meu aprimoramento foram implacáveis.

Aos professores Cristiano Costa, João Zani e Marcelo Perlin, que estiveram sempre dispostos a contribuir e foram fundamentais em seus ensinamentos, bem como na participação ímpar em banca de defesa.

Aos demais professores presentes ao longo do curso, dedicando importante parte de seu tempo à pesquisa e docência, provocando mudanças positivas no ambiente acadêmico.

Aos meus pais, namorada e amigos, que sempre acreditaram, apoiaram e se fizeram presentes em minha vida, nos momentos de felicidade e de desafios.

Ao PPG Contábeis da Universidade do Vale do Rio dos Sinos, pelo trabalho de excelência desempenhado ao longo destes anos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

O presente estudo baseia seus esforços na busca de possíveis variáveis determinantes de diferenças entre volatilidades implícitas nas opções de compra de uma mesma empresa no Brasil. Objetiva-se estimar se há relação entre as variáveis de liquidez na dimensão das diferenças de volatilidades implícitas observadas, além de corroborar o impacto positivo da relação entre preço de exercício e cotação do subjacente sobre essas assimetrias, como apontado em estudos pretéritos para mercados de derivativos internacionais. Também busca-se identificar se o ajuste quadrático de determinadas variáveis é mais apropriado para explicar tais diferenças. Analisa-se doze empresas listadas no mercado de capitais brasileiro com distintos níveis de negociação em opções no período de março a dezembro de 2019, utilizando dados de alta frequência para estimar quatro regressões de mínimos quadrados ordinários. Observa-se que há baixa interação e significância das variáveis para liquidez sobre a variável dependente observada durante o período para as empresas objeto de análise. Pode-se levar em consideração que: (I) a liquidez das negociações de uma determinada empresa possa afetar igualmente suas opções de diferentes preços de exercício; (II) as *proxies* utilizadas podem não captar a variável de interesse adequadamente, ou (III) a liquidez, em níveis observados, não efetivamente afeta nas dimensões destas diferenças. Apesar disso, corrobora-se o entendimento de que há 'efeito sorriso' e que o ajuste quadrático de variáveis como tempo e *moneyness* são mais apropriados para explicar a variável dependente observada.

Palavras-chave: Modelo de Black e Scholes. Volatilidade implícita. Opções. Liquidez.

ABSTRACT

The present study targets its efforts towards the determination of possible variables that can explain the differences in implied volatility between same-firm options calls in Brazilian derivatives market. It aims to estimate if there is a relationship between liquidity proxies into the dimension of the observed implied volatilities, in addition to corroborate the positive impact of the relation between options' strike and stock price over these asymmetries, as pointed by previous studies in international derivative markets. It also tries to identify if the quadratic adjustment of some variables is a better fitment to explain these differences. It analyzes twelve companies listed in the Brazilian capital market with different levels of options negotiation between march and december 2019, using high frequency data to estimate four ordinary least squares regressions. It observes that liquidity proxies have low significance and interaction with the dependent variable for the companies in the time-frame of the data. It is appropriate to consider that: (I) negotiation's liquidity of a determined firm may affect different call options strikes equally; (II) the proxies used may not capture the interest variable assertively, or (III) the liquidity, at observed levels, does not affect into the differences' dimensions. Despite that, the understanding of the volatility smile is corroborated and the quadratic adjustment for time decay and moneyness are more appropriate to explain the relation with the observed dependent variable.

Keywords: Black and Scholes Model. Implied Volatility. Options. Liquidity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1:	Efeito Sorriso da Volatilidade Implícita	13
Figura 2:	Total de Observações Utilizadas	40

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Variáveis Utilizadas	35
Tabela 2:	Modelo de Regressão Utilizando Diferenças Simples	46
Tabela 3:	Modelo de Regressão Utilizando Diferenças Simples	48
Tabela 4:	Modelo de Regressão Utilizando Diferenças Ponderadas	50
Tabela 5:	Modelo de Regressão Utilizando Diferenças Ponderadas	52
Tabela 6:	Matriz de Correlação de Pearson entre as Variáveis Independentes	62
Tabela 7:	Estatística Descritiva - VALE3	62
Tabela 8:	Estatística Descritiva - VVAR3	63
Tabela 9:	Estatística Descritiva - ABEV3	63
Tabela 10:	Estatística Descritiva - BOVA11	64
Tabela 11:	Estatística Descritiva - LAME4	64
Tabela 12:	Estatística Descritiva - COGN3	64
Tabela 13:	Estatística Descritiva - JBSS3	65
Tabela 14:	Estatística Descritiva - BRFS3	65
Tabela 15:	Estatística Descritiva - RAIL3	65
Tabela 16:	Estatística Descritiva - OIBR3	66
Tabela 17:	Estatística Descritiva - EMBR3	66
Tabela 18:	Estatística Descritiva - MRFG3	66

LISTA DE SIGLAS

B-S	Black e Scholes
ATM	<i>At the money</i>
OTM	<i>Out of the money</i>
ITM	<i>In the money</i>
CBOE	<i>Chicago Board Options Exchange</i>
VIX	<i>Volatility Index</i>
CAPM	<i>Capital Asset Pricing Model</i>
CEO	<i>Chief Executive Office</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Apresentação do Tema e Problema de Pesquisa	11
1.2	Objetivos	17
1.3	Justificativa	17
1.4	Delimitação do Estudo	18
2	REFERENCIAL TEÓRICO	20
2.1	Modelos de Precificação de Opções	21
2.1.1	O Modelo Binomial de Cox, Ross e Rubinstein	21
2.1.2	O Modelo de Black e Scholes	23
2.1.3	As Gregas	24
2.2	Estudos Empíricos Subsequentes	25
2.2.1	Incorporação de Eventos não Antecipados	26
2.2.2	Diferentes Perspectivas para o Modelo	27
2.3	O Conceito de Valor Extrínseco	27
2.4	A Ótica da Liquidez para a Formação de Preços	28
2.5	Estudos Contemporâneos sobre Volatilidade Implícita	30
2.6	Desenvolvimento das Hipóteses	32
3	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	34
3.1	Variáveis de Interesse e Regressões Utilizadas	34
3.1.1	Variáveis Dependentes	34
3.1.2	Variáveis Independentes	35
3.1.3	Modelos de Regressão	36
3.2	Dados Coletados e Critérios de Ajuste	37
4	APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	44
4.1	Regressão 1: Diferenças Simples	44
4.2	Regressão 2: Diferenças Simples	47
4.3	Regressão 3: Diferenças Ponderadas	49
4.4	Regressão 4: Diferenças Ponderadas	51
4.5	Relações entre as Diferentes Regressões para Cada Empresa	51
4.6	Resumo das Variáveis de Interesse	55
4.6.1	<i>Moneyness</i>	55
4.6.2	<i>Proxies</i> para Liquidez	56
4.6.3	Ajustes Quadráticos	56
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICE A MATRIZ DE CORRELAÇÃO E ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS	62

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do Tema e Problema de Pesquisa

A necessidade de se entender a dinâmica dos mercados de derivativos é uma crescente no mercado financeiro. Segundo Hull (2003), quando utilizado os volumes equivalentes em ativos subjacentes, este mercado movimenta valores substancialmente maiores que os mercados de ativos. Houve crescente importância deste mercado nos últimos 30 anos, tornando-se um assunto central no âmbito das finanças.

A definição de mercados de derivativos pode ser entendida como um instrumento financeiro que deriva de um ou mais instrumentos financeiros subjacentes. Suas modalidades mais utilizadas são: futuros, termos, *swaps* e opções (ALEXANDER, 2008). As opções relacionam-se diretamente com as ações de uma firma, listada e negociada em bolsa de valores. Estas são utilizadas com a finalidade de proteção contra quedas, previsibilidade de retornos, bem como para operações que possam envolver alavancagem. Garantem o direito do possuidor e a obrigação do lançador em honrar determinado contrato, com prazo e preço do ativo previamente estipulados, a um custo determinado pelo mercado.

O preço de uma opção pode ser descrito como o somatório de valor intrínseco e extrínseco. O primeiro é a diferença entre preço de mercado da ação e seu preço de exercício, já o valor extrínseco pode ser entendido como o prêmio pelo risco do ativo e pelo tempo da opção, assim como da taxa de juros (FRANCO, 2014). Para Hull (2003), o comportamento do valor extrínseco - entendido como o prêmio requerido pelo possuidor de uma opção - resulta de mudanças das expectativas dos movimentos nos preços da ação objeto, identificado pela volatilidade e pela passagem do tempo.

A volatilidade pode ser entendida como a frequência e a intensidade das variações no preço do ativo objeto, em um período determinado de tempo; se a volatilidade tende a crescer, há maior magnitude nas variações dos preços desse ativo, do contrário, se a volatilidade cair, espera-se frequência e intensidade menores nessas variações. Espera-se que os preços das opções acompanhem as mudanças na volatilidade.

O efeito do tempo fará o valor extrínseco convergir para zero na data de exercício, ora apontado por Franco (2014). Isso acontece pois não haverá mais expectativas sobre preços futuros na data de exercício de uma opção; o tempo faz o valor extrínseco - ou prêmio - esgotar-se conforme o exercício se aproxima. Por simplificação, essa convergência é assumida como um processo linear, o que dificilmente se espera que ocorra na prática. O preço de uma opção em sua data fim será a diferença entre o preço da ação e o preço de exercício, definido

como valor intrínseco. Fator essencial à precificação de uma opção é a volatilidade do ativo.

Hull (2003) demonstra que a volatilidade da ação subjacente é o único parâmetro do modelo de Black & Scholes que não pode ser diretamente observado; sua melhor aproximação é a volatilidade presente (projetada, dada uma distribuição de probabilidade no tempo t do exercício da opção), pois a trajetória da volatilidade futura está condicionada ao ponto de partida em que a volatilidade presente se encontra. De forma análoga, o preço de uma ação pode assumir uma distribuição normal de valor, entretanto, tem como parâmetro de referência o valor que apresenta no presente.

O histórico da distribuição de preços de uma ação cria um elo de dependência para a expectativa da volatilidade futura, apesar de a distribuição passada não ser garantia da volatilidade que ocorrerá. Por ser definido *ex ante*, o preço de uma opção torna a volatilidade implícita do modelo de Black e Scholes (B-S) uma variável determinável a cada período de tempo t , e esta apresenta diferenças em opções de mesma data de exercício (taxa de juros, preços de exercício, preço da ação e prazo também são conhecidos *a priori*). A partir desse corpo informacional, o presente estudo se direcionará em busca de possíveis determinantes das diferenças entre volatilidades implícitas das opções de compra de diferentes empresas no Brasil.

Dado que as opções já foram lançadas no mercado, suas trajetórias em cada período variarão conforme as expectativas entre compradores e vendedores sobre os preços. Essa expectativa deve contemplar a volatilidade observada do ativo subjacente para o cálculo do prêmio requerido pelo possuidor da opção, projetando-a até o exercício. Dados os preços das negociações efetuadas, e sabendo-se as demais variáveis do modelo, pode-se determinar qual seria a volatilidade implícita para que aquela opção, naquele prazo de exercício, estivesse precificada daquela maneira em que o negócio foi efetuado no mercado.

A evidência empírica - de autores como Black (1975); Gultekin, Rogalski e Tinic (1982); Rebonato (2020), por exemplo - mostra que, em uma mesma data de liquidação, um conjunto de opções de diferentes preços de exercício são negociadas com diferentes volatilidades implícitas (em decorrência das diferenças nos seus prêmios não serem explicadas apenas pelas variáveis da fórmula de B-S), o que leva a crer que existam imperfeições (sejam de mercado ou de especificação do modelo) resultando em variações nas volatilidades implícitas calculadas conforme os prêmios de opções variam.

A suposição do modelo de Black e Scholes é que a volatilidade da ação seja um dos determinantes do preço de sua opção, sendo, necessariamente, medida única para qualquer conjunto de opções do mesmo ativo. Black e Scholes (1973) utilizam a volatilidade presente como a melhor informação disponível para a estimar a volatilidade desse ativo no tempo t (futuro, em que ocorrerá o exercício do derivativo), já que volatilidade futura não pode ser diretamente

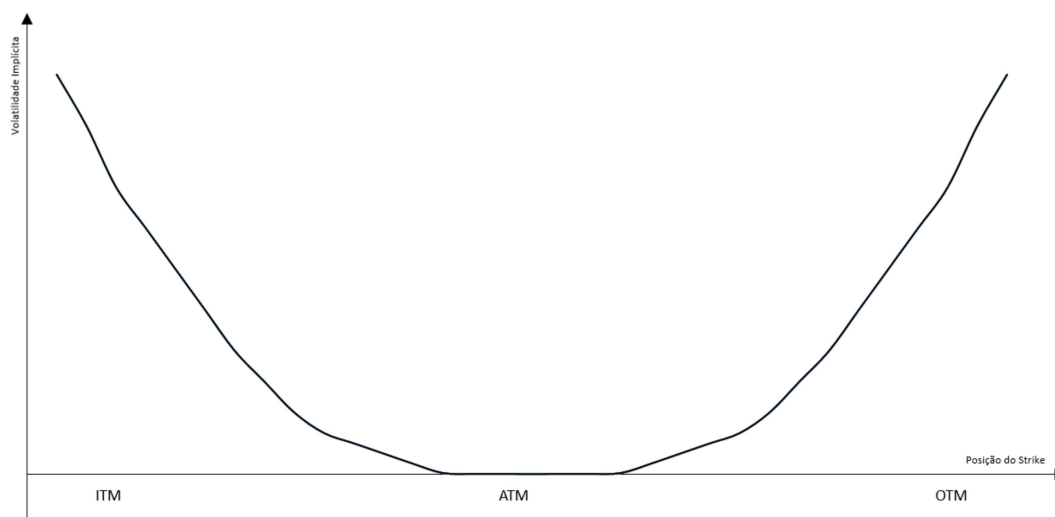


Figura 1: Efeito Sorriso da Volatilidade Implícita

Fonte: Elaboração própria.

determinada. Black, Scholes e Merton em 1973 promoveram uma mudança de paradigma, ao desenvolverem conjuntamente um modelo de precificação de opções, que culminou com o reconhecimento através do prêmio Nobel de 1997, entregue a Merton e Scholes.

Nos seguintes anos à publicação, os recorrentes testes empíricos do modelo demonstrado pelos pesquisadores observaram distorções entre as volatilidades implícitas das opções de diferentes preços de exercício (*strikes*, em inglês) em uma mesma data, para um mesmo ativo, conforme apontado por Cox, Ross e Rubinstein (1979); Chiras e Manaster (1978); Dumas, Fleming e Whaley (1998). Esses estudos utilizaram os preços dados pelo mercado de opções e estimaram a volatilidade que o modelo deveria ter para que retornasse o preço observado. O que se verificou foi que houveram diferenças significativas entre volatilidades de opções de diferentes *strikes*, o que, por definição, demonstra que pode haver componentes explicativos do prêmio de uma opção, além da volatilidade, não especificados no modelo.

Para além dessas publicações, já é difundido o entendimento de que um conjunto de opções de diferentes *strikes* apresente diferentes volatilidades implícitas, sendo o conceito conhecido como 'sorriso' da volatilidade. Esse comportamento ocorre a partir da estimação da volatilidade que deveria ser observada pelo mercado, dados aqueles preços de opções de diferentes faixas de *strikes* em uma mesma data de exercício. Destaca-se que, apesar de haver concórdia na literatura americana, este conceito carece de aprofundamento no mercado brasileiro de derivativos. Estudos sobre o 'efeito sorriso' da volatilidade com dados intradiários são escassos no Brasil - Lanari (2000), Viana (1998) e Gentil Junior (2007) - desenvolvidos antes

da disponibilidade de dados de alta frequência deixam de considerar efeitos de liquidez do mercado para possíveis ajustes entre as diferenças de volatilidade observadas.

A estimação da volatilidade implícita ao modelo de Black e Scholes (que se refere ao ativo subjacente), quando feita a partir dos prêmios pagos em negócios realizados no mercado, encontra seu mais adequado estimador da verdadeira volatilidade deste ativo quando este é calculado a partir de uma opção que se encontra 'no dinheiro' - *at the money*, ATM -, ou muito próximo dele. Alternativamente, as opções também podem estar 'dentro' (quando *strike* de uma *call* situa-se abaixo do preço da ação) e 'fora do dinheiro' (*strike* acima da cotação do ativo), respectivamente ITM e OTM (*in the money*, *out of the money*). Quanto mais distantes estes preços de exercício estão da cotação no tempo t daquele ativo, proporcionalmente maiores serão as volatilidades implícitas em relação à volatilidade de uma opção de compra 'no dinheiro'.

De fato, a evidência empírica dos últimos quarenta anos aponta que vendedores de opções tendem a receber um prêmio em excesso, já compradores pagarão mais caro do que é estimado pelo modelo por opções que não se encontram no dinheiro, fato revelado pela maior volatilidade implícita como explicador desse preço (dentro do escopo do modelo). Didaticamente, existem três grandes grupos de opções, quando classificamo-nas em relação à diferença do preço de exercício e cotação do ativo subjacente.

Opções são classificadas 'dentro do dinheiro' quando o preço de exercício é inferior ao preço da ação objeto, para o caso de uma opção de compra. Quando o preço de uma opção de compra é superior ao preço da ação objeto, diz-se que a opção está 'fora do dinheiro' - não haverão interessados em exercer o direito de comprar um ativo acima de seu preço de mercado, fato que tornará o prêmio desta opção zero em seu exercício; preço de exercício igual ou muito próximo do preço do ativo é conceituado como 'no dinheiro'. Não há consenso teórico do efetivo limite em que uma opção deixa de estar 'no dinheiro', ainda mais quando se considera uma amostra de dados de alta frequência, em que a cada segundo um novo preço se formará para o ativo.

Este fator deve levar em consideração a estrutura do mercado de opções, a liquidez do derivativo, a volatilidade do ativo subjacente, seu volume negociado, entre outras especificidades. O que pode ser dito é que uma opção no dinheiro deve estar o mais próximo possível da cotação naquele instante do tempo. Apenas opções de compra 'dentro do dinheiro' possuem valor intrínseco, ao passo que todas as opções possuem algum valor extrínseco, pois este reflete a possibilidade de a opção passar a ter valor intrínseco no futuro (HULL, 2003).

Apesar da premissa de que a volatilidade implícita deveria ser única, Dumas, Fleming e Whaley (1998) observaram em seus estudos que a volatilidade observada pelo cálculo atra-

vés do modelo apresentou decaimento monotônico enquanto o preço de exercício subiu, com aceleração maior desse decaimento para opções de curtos períodos de exercício. Essa aproximação de linearidade pode ser explicada em parte pela disponibilidade dos dados, tendo em vista os estudos à época não utilizarem dados intradiários; o presente estudo abrangerá, de forma adjacente, essa premissa de ajuste linear com vistas a contribuir com poder de explicação desses desvios.

Já a respeito do prazo, Franco (2014) observa que o mercado brasileiro de opções apresenta maior parte dos negócios realizados em opções de curto período, principalmente nas três semanas que antecedem o vencimento, sendo esta uma das evidências da relativa falta de liquidez dos derivativos nacionais. Posto isso, a relevância em utilizar dados de um país em desenvolvimento - e com características específicas - é diretamente influenciada pelo objetivo geral do presente trabalho, que visa identificar possíveis determinantes das diferenças entre volatilidades implícitas estimadas pelo modelo de Black e Scholes das opções de compra do mercado brasileiro.

A aparente inconsistência na precificação que resulta do modelo denota que, se a volatilidade implícita de uma ação objeto deve ser única para opções de igual prazo (refletindo a volatilidade do ativo principal), então um possível desvio entre preço teórico e preço observado pode dever-se à não internalização de todos os fatores que compõem o preço de um derivativo. Ao utilizar dados brasileiros, visa-se explorar quais podem ser os determinantes explicadores desses desvios, tendo o baixo volume de negociações dos derivativos em bolsa atenção especial do estudo. Busca-se, inicialmente, corroborar o conceito de sorriso da volatilidade (diretamente dependente da distância em que o *strike* se situar em relação ao ativo) e isolar o comportamento da liquidez dos negócios realizados a fim de aprofundar o conhecimento até então incipiente sobre os derivativos no Brasil, cujos conceitos testados a partir de dados de mercados desenvolvidos podem apresentar diferentes ajustes nos mercados emergentes.

O distanciamento do preço de exercício de uma opção em relação ao preço da ação objeto é conceituado, em inglês, como *moneyness*. Este é expresso como a razão entre preço da ação e preço de exercício. O fato de essa medida ser um possível determinante da imprecisão do modelo será revisitada pelo estudo com dados para o Brasil. Há a possibilidade de haver, em alguma medida, interdependência entre liquidez e *moneyness*, supondo que menos negócios serão realizados tanto quanto menor for a probabilidade de uma opção apresentar valor intrínseco no futuro. Em que pese esta intuição, muitas estratégias utilizadas por agentes do mercado valem-se da baixa probabilidade de exercício de uma opção, seja pela alta probabilidade de recolher seu prêmio (pelo lado do lançador), seja pelo viés de subprecificação de eventos pouco prováveis, refletindo em retornos em excesso em momentos de estresse do

mercado.

Esta tendência de subestimação de eventos pouco prováveis, tal qual Kahneman (1979) aborda em seu estudo, pode, adicionalmente, contribuir para imprecisões na avaliação entre risco e retorno - e consequentemente na precificação de um derivativo -, resultando em diferentes preços teóricos e observados. Cabe apropriada atenção sobre essa dicotomia entre liquidez e captação de vieses por agentes do mercado no caso brasileiro, buscando observar se estas imprecisões também são oriundas do volume negociado e atribuíveis ao sorriso da volatilidade.

O desenvolvimento do estudo em busca dos fatores que possam determinar estes desvios nas volatilidades implícitas calculadas para diferentes prêmios de opções de compra no Brasil torna-se variável-chave no entendimento da adequação do modelo de Black e Scholes à realidade do mercado brasileiro. Utilizando dados de alta frequência, pode-se identificar comportamentos com maior nível de assertividade, medindo em que nível e sob quais condições a relativa baixa liquidez do mercado e a *moneyness* possam impactar na precificação dos derivativos brasileiros.

Em um recente estudo, Bärholm (2017) passa a incorporar análises sobre volatilidade implícita com dados de alta frequência. Suas observações são para cada minuto de negociações (sendo o autor um dos pioneiros). O presente estudo avançará nesta tendência de maiores amostras de dados ao utilizar observações para cada segundo de negociação, visando o aprimoramento da análise do tema.

O que se observa há décadas em mercados desenvolvidos (volatilidades implícitas calculadas diferentes de um mesmo ativo em cada *strike*) será revisitado pela amostra brasileira no presente estudo. Corroborando-se a hipótese consistente do 'efeito sorriso' para as volatilidades observadas a partir dos dados de alta frequência, avança-se em favor da possibilidade de que menores níveis de negociação de determinados derivativos também possam contribuir para que estas distorções ocorram.

Os efeitos da liquidez dos derivativos no mercado brasileiro podem revelar componentes adicionais de desvios entre a estimação feita pelo modelo de Black & Scholes e a marcação a mercado, afetando a acurácia do modelo. Nesta lacuna de pesquisa, o presente trabalho visa contribuir com uma análise empírica dos possíveis determinantes de desvios de volatilidades implícitas de uma opção brasileira, levantando a possibilidade de haver efeitos estatisticamente significativos para liquidez como uma das possíveis variáveis explicativas.

Portanto, o problema de pesquisa é: **Quais são os possíveis determinantes das diferenças entre volatilidades implícitas para opções brasileiras para um mesmo ativo subjacente?**

1.2 Objetivos

O objetivo geral do estudo é identificar possíveis determinantes desencadeadores de desvios entre as volatilidades implícitas observadas nos prêmios de opções de compra negociados no mercado de derivativos brasileiro, quando calculadas sob os preceitos do modelo de Black & Scholes.

1.3 Justificativa

Apesar de haver um grande número de estudos internacionais aplicados ao tema da consistência da precificação do modelo através de testes empíricos, a pesquisa científica com dados brasileiros encontra-se incipiente, tanto para a medição da assertividade do modelo ao estimar os preços quanto para a hipótese de a liquidez influenciar em uma possível distorção. O estudo do volume negociado em mercados em desenvolvimento como um possível fator determinante das diferenças entre volatilidades implícitas calculadas justifica a utilização de uma base de dados para o Brasil. As características que diferenciam o mercado de derivativos no Brasil, especialmente no que diz respeito à prazos de exercício e liquidez de negociações, podem revelar importantes achados para a pesquisa científica na área. Secundariamente, a aplicabilidade dos estudos de forma a promover difusão da informação ao mercado contribui para a relevância da pesquisa.

Acredita-se que a liquidez dos papéis negociados seja condição necessária para que se observe a correta precificação de uma opção, como já apontado por Vieira e Milach (2008). O Brasil não dispõe de um volume de negócios comparável aos dos mercados já objetos de estudos, que permitam corroborar as hipóteses testadas sem o tratamento para a liquidez. Há relativo ineditismo da pesquisa tanto para a abordagem do 'efeito sorriso' com dados de alta frequência, quanto para a liquidez e testes dos ajustes quadráticos para variáveis como tempo, destacando características particulares das negociações efetuadas no Brasil. A abordagem das diferenças de volatilidades implícitas é um conceito atual e de estudos recorrentes; possibilita aprofundar o nível de detalhamento da análise empírica. O suporte econométrico, com a utilização de dados de alta frequência, dá maior robustez na análise dos resultados e tende a contribuir para a qualidade das conclusões.

Outro fator relevante a ser considerado é a aplicabilidade das possíveis conclusões, tendo em vista a relação direta do seu tema à prática de mercado; o conhecimento sobre os derivativos fomenta sua liquidez. A ausência de negociação de diversos produtos financeiros no Brasil repercute positivamente para a relevância do tema; existem barreiras informacionais

para o investidor médio, o que resulta em menor liquidez de negócios realizados, penalizando não apenas o agente médio: a falta de liquidez atinge agentes detentores de informação cuja disposição em atuar em um mercado com baixo número de negociações é inibida.

O processo de difusão da informação sobre o mercado de derivativos no Brasil passa por um desenvolvimento de pesquisa acadêmica relevante, que traz embasamento empírico à tomada de decisão. Os achados de estudos acadêmicos são processo catalisador de superação de assimetrias; mais informações relevantes resultam em mais negócios no mercado de capitais, estimulando novos problemas de pesquisa.

1.4 Delimitação do Estudo

A presente dissertação delimita seus esforços ao intervalo de negociações efetuadas entre março e dezembro de 2019, para as opções de compra de doze empresas com diferentes níveis de negociações. A totalidade de observações a cada segundo é utilizada, restringindo-se à análise dos fatores que possam implicar em maiores ou menores diferenças entre volatilidades implícitas entre uma mesma empresa, bem como comparando tais resultados entre empresas de diferentes níveis de negociação ora apontados. Excetua-se do escopo do estudo demais análises relacionadas a variações de volatilidade de um mesmo ativo ao longo tempo, ou quaisquer outros possíveis fatores que impliquem em desequilíbrios entre prêmios de opções que não estejam estritamente relacionados à variável de interesse, qual seja, volatilidade implícita.

Tais resultados estão segmentados ao período de mercado observado, sob as condições que foram identificadas; períodos em que medidas de volatilidade (absoluta) forem distintos, podem acarretar em diferentes interpretações, assim como momentos macroeconômicos de maior ou menor estabilidade também são fatores que podem alterar as condições gerais identificadas através da coleta de dados. Ademais, opções de venda (*puts*) não foram o principal foco do estudo, tendo em vista representarem apenas um quarto do total das negociações do período, requerendo ajustes de base de dados específicos a tal contrato, enfocando-se o estudo nas opções de compra, com relevante volume de informação.

Observa-se, no universo de publicações da área, estudos que visam aprimorar e introduzir diferentes modelos de estimação de preços de uma opção. O presente trabalho restringe-se a estudar a adequação do modelo desenvolvido exclusivamente por Black e Scholes aos preços observados no mercado nacional. Ao focar em uma amostra de dados para o mercado brasileiro, também diferencia-se de estudos que aplicam esforços em identificar diferenças e similaridades entre mercados de diversos países. Para observar as diferenças de volatilidades implícitas de opções de um mesmo ativo, comparou-se os diferentes preços de exercícios ne-

gocados em um dado período de tempo, não observando, também, comparações entre opções de um mesmo preço de exercício de diferentes prazos, em que seria possível investigar possíveis assimetrias entre volatilidades implícitas, como abordado em artigos relacionados ao tema.

A delimitação do estudo ao modelo de Black e Scholes (em detrimento de demais modelos que precificam opções) deve-se a sua ampla utilização no mercado, sua reconhecida robustez ao longo de mais de quatro décadas de existência, bem como pelo fato de que grande parte dos estudos dessa temática utiliza-o como base de comparação, para diversos objetivos de pesquisa. Segue sendo assertivo para diferentes mercados e produtos financeiros, e permite que a pesquisa desenvolvida seja passível de comparação com o que já fora publicado sobre o tema nacional e internacionalmente. Estudos nacionais publicados anteriormente utilizam o modelo de Black e Scholes para estimar as volatilidades implícitas de ativos negociados, à época, no mercado de capitais. Possibilita-se compará-los aos achados recentes, com uma base de dados mais ampla.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A adequada precificação de uma opção passa pela precisa especificação de seus principais determinantes. O primeiro esforço acadêmico nesse sentido ocorreu há, pelo menos, 120 anos, acreditado a Louis Bachelier que, em 1900, utilizou uma fórmula de precificação a partir do movimento browniano com desvio zero, descrito por Merton et al. (1973). Desde então, o trabalho mais reconhecido, cujo modelo é aplicado até os dias atuais, cabe a Black e Scholes (1973); Merton (1976). A revisão da literatura deste estudo visa explorar, sem a pretensão de extinguir o tema, a formação desse corpo teórico: a estrutura dos modelos de precificação de opções; os pressupostos utilizados e suas limitações; os estudos empíricos relevantes desde seu surgimento até as publicações atuais, apresentar o conceito de valor extrínseco de uma opção, a ótica da liquidez para a formação de preços de mercado bem como sua dinâmica.

O mercado de capitais pode ser dividido entre mercado de ativos e mercado de derivativos. No mercado de ativos são negociadas participações em empresas através de ações. Os mercados de derivativos por outro lado, negociam direitos de compra e de venda sobre ativos, índices, commodities ou sobre o câmbio em diferentes moedas. Segundo Alexander (2008), opções começaram a ser negociadas no século dezessete e vieram a contribuir à famosa bolha das tulipas, em Amsterdã.

O mercado de derivativos tem como objetivo inicial a promoção de *hedge*, ou seja, securitização dos ativos. É possível adquirir um seguro para preços e quantidades de ativos em um momento futuro. As opções de compra e de venda são modalidade desses direitos. Seu possuidor pode discricionariamente exercê-la se os preços lhe forem favoráveis, ou apenas arcar com o valor pago pelo contrato. Analogamente, opções são bastante similares com seguros de veículos ou imobiliários: paga-se um prêmio antecipadamente pelo direito de exercer esse contrato sob determinadas condições que podem ocorrer durante sua vigência em um momento futuro (um sinistro, ou uma variação abrupta de preços, no caso dos ativos).

Alexander (2008) define uma opção como um contrato que dá direito ao possuidor de entrar em outro contrato durante um período específico no tempo. Uma opção de compra (*call*), dá o direito de adquirir determinada ação a um preço fixado. Da mesma maneira, o detentor de uma opção de venda (*put*), tem o direito de vender determinado papel a um preço previamente conhecido. Se por um lado contratos futuros serão necessariamente exercidos em seu vencimento, as opções não se confundem com obrigações.

Entretanto, o vendedor de uma opção vincula-se a sua obrigação, devendo vender seus papéis ao preço estipulado no caso de exercício de uma opção de compra, ou de adquirir ativos ao preço acordado quando o possuidor de uma *put* desejar exercê-la. Opções europeias

dão o direito a esse exercício apenas ao final do prazo estipulado, já opções americanas podem ser exercidas antes do seu vencimento. Ambas são as modalidades de opções disponíveis no mercado brasileiro.

2.1 Modelos de Precificação de Opções

Um modelo de precificação de opções robusto deve levar em conta os efeitos do tempo e da volatilidade, bem como a medida da taxa de juros livre de risco. É possível determinar o preço de uma opção como um processo discreto ou contínuo no tempo. Como exemplo de processo discreto, tem-se Cox, Ross e Rubinstein (1979), sendo que, conforme os intervalos no tempo tornam-se cada vez menores, chega-se no caso limite do modelo exposto por Black & Scholes (B-S), sendo o processo de difusão do tempo continuamente variável.

2.1.1 O Modelo Binomial de Cox, Ross e Rubinstein

Cox, Ross e Rubinstein (1979) apresentam um modelo relativamente simples para avaliar opções, discreto no tempo. Ficam claros os princípios econômicos fundamentais de precificação de opções por métodos de arbitragem, requerendo apenas matemática básica; apresenta-se como caso limite o modelo de Black & Scholes, já derivado anos antes por métodos mais complexos.

Os estudos que seguiram ao de Black & Scholes e Merton provaram que seus pressupostos podem ser generalizados para qualquer área das finanças. A saber, praticamente todos os títulos corporativos podem ser interpretados como portfólios de *calls* e *puts* sobre os ativos da firma. A precificação de contratos que envolvam algum resultado dependente de quantificação de um evento futuro e incerto também são exemplos de problemas econômicos passíveis de aplicação de modelos de precificação desse tipo.

A ideia básica é poder deduzir o valor de uma *call* a partir do preço atual da ação, da provável distribuição dos preços futuros, das taxas de juros e do preço de exercício do derivativo. Em Cox, Ross e Rubinstein (1979), o modelo de precificação de opções assume um processo binomial, discreto, com probabilidade q de apreciação uS , e depreciação dS com probabilidade $1-q$.

Seus pressupostos são: a taxa de juros é constante; não há impostos nem custos de transação e exigências de margem de garantia. Por isso, um indivíduo não tem limites para operar *short* (fazer uma venda a descoberto). Se r é 1 mais a taxa livre de risco para um período, então $u > r > d$; não havendo estas desigualdades, há oportunidades de arbitragem.

Analisando para um período, assume-se que C é o preço atual da *call*, e C_u o preço no fim do período se a ação principal subir uS , e C_d caso a ação deprecie para dS . Como há apenas um período para expirar, sabe-se que $C_u = \max [0, uS - K]$ e $C_d = \max [0, dS - K]$. Havendo um portfólio com δ ações e um montante B em dólares em títulos sem risco, seu custo será $\delta S + B$. No fim do período, o valor do portfólio será: $\delta uS + rB$ com probabilidade q , ou $\delta dS + rB$ com probabilidade $1 - q$. Como se pode escolher δ e B em quaisquer quantidades, o autor escolheu uma proporção que igualasse os valores no fim do período para o portfólio para cada possível resultado. Isso quer dizer que

$$\delta uS + rB = C_u \quad (2.1)$$

$$\delta dS + rB = C_d \quad (2.2)$$

Resultando em:

$$\delta = \frac{C_u - C_d}{(u - d)S} \quad (2.3)$$

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{(u - d)r} \quad (2.4)$$

Escolhendo δ e B desta maneira, tem-se o portfólio de *hedge*. Se não há oportunidades de arbitragem, então o valor atual da *call*, C , não pode ser inferior ao valor presente do portfólio de *hedge*, $\delta S + B$. As principais características observadas são:

Primeiro, a probabilidade q não aparece na fórmula, isto é, mesmo que os investidores tenham subjetividade ao avaliar a probabilidade, estes podem concordar com a relação entre C , S , u , d e r . Segundo, o valor da *call* não é dependente da atitude do investidor (*risk-averse* ou *risk-preferring*), apenas que mais riqueza é melhor que menos e que oportunidades de arbitragem serão aproveitadas.

Terceiro, o único valor aleatório do qual a opção de compra depende é o da ação principal, e, em particular, não depende de um portfólio de mercado contendo todas as *securities* da economia. Por último, p é idêntico a $(r - d) / (u - d)$, sendo sempre um valor entre zero e um, contendo, portanto, a propriedade probabilística. P seria o valor o qual q assumiria em um equilíbrio caso os investidores fossem neutros ao risco. A interpretação é que o valor da opção seria a expectativa de seu valor futuro descontado em um cenário neutro a risco. O caso para um período é generalizado para vários períodos pelo autor, demonstrando coerência entre os cálculos obtidos.

Os casos limitantes apresentados no artigo referem-se à possibilidade de movimentos contínuos de preços, ao longo de um mesmo dia. Apesar de assumir o período em dias, o modelo binomial de Cox pode assumir tantos intervalos quanto necessários para acompanhar o movimento de uma opção. No limite, assume-se movimento contínuo do preço de uma ação, portanto, o modelo binomial de Cox resulta no caso geral de Black & Scholes. Cox parte de um modelo simples e consegue, ao mesmo tempo, demonstrar sua validade e corroborar o modelo de B-S.

Cox conclui que: sendo o movimento de uma ação um processo discreto binomial, ou um caso limite (contínuo), é possível precificar uma opção com base na possibilidade de arbitragem, mesmo com generalizações mais complexas do caso binomial. A probabilidade de apreciação e depreciação não entram na fórmula de precificação. Por isso, obtém-se o mesmo resultado independentemente se q é calculado com base nos preços passados da ação, atuais, ou se passeio aleatório.

Além disso, u e d podem ser funções determinísticas do tempo. Entretanto, se a dimensão das mudanças de preço ao longo do tempo não forem perfeitamente correlacionadas com o preço da ação, então a fórmula não precificará a opção corretamente. Além disso, o spread entre ofertar e tomar crédito e a existência de margem de garantia podem provocar, também, a possibilidade de arbitragem.

2.1.2 O Modelo de Black e Scholes

Assim como Cox, o modelo de precificação desenvolvido por Black & Scholes assume o pressuposto de que, se o preço de uma opção está adequadamente formado pelo mercado, então não há possibilidades de retorno sem risco, isto é, através de arbitragem. Portanto, seu modelo visa estimar uma medida racional de preços; para estes autores, os principais determinantes do preço de uma opção são: o preço da ação-objeto, o preço de exercício, o tempo para o exercício, a volatilidade e a taxa de juros livre de risco. A volatilidade é a única variável não observável diretamente, apenas as demais variáveis estão dadas pelo mercado. As condições ideais de estimação do preço de uma opção de compra, segundo B-S são:

1. a taxa de juros de curto prazo é conhecida e constante ao longo do tempo;
2. o preço da ação objeto segue um comportamento de passeio aleatório, continuamente no tempo, com uma taxa de variação proporcional ao quadrado da variância da ação, ou seja, a distribuição possível do preço de uma ação segue um comportamento logarítmico, sendo a taxa de variância da ação considerada constante no modelo;

3. a ação não paga dividendos;
4. opção do tipo europeia, com exercício apenas no final;
5. não há custos de transação;
6. é possível pegar emprestado qualquer fração de um *security* à taxa de juros de curto prazo;
7. não há restrições para venda descoberta.

Apesar de Black & Scholes suporem - por simplificação - o exercício das opções apenas no seu vencimento, não há perda significativa de explicação do modelo quando o mercado de opções é do tipo americano, como visto em Black e Scholes (1973); MacBeth e Merville (1979).

O modelo, portanto, é descrito por:

$$w(x, t) = xN(d1) - ce^{r(t-t^*)}N(d2) \quad (2.5)$$

Sendo que d1 e d2 referem-se, respectivamente, a:

$$d1 = \frac{\ln \frac{x}{c} + (r + \frac{1}{2}v^2)(t^* - t)}{v\sqrt{t^* - t}} \quad (2.6)$$

$$d2 = \frac{\ln \frac{x}{c} + (r - \frac{1}{2}v^2)(t^* - t)}{v\sqrt{t^* - t}} \quad (2.7)$$

Em que x e c são, respectivamente, o preço da ação e o preço de exercício da opção. O componente d1 e d2 são distribuições normais de probabilidade. Os testes empíricos realizados pelos autores revelaram que os compradores de opções pagavam preços consistentemente mais altos do que os previstos pelo modelo. Vendedores de opções, entretanto, receberam preços que eram aproximadamente os mesmos previstos pela fórmula. A explicação se dá pelos custos de transação pagos pelos compradores de opções. As diferenças entre preços pagos e estimados foi maior para opções de ações de baixa volatilidade, se comparado com ações de maior potencial de variabilidade.

2.1.3 As Gregas

A análise das derivadas parciais da equação 2.5 permite identificar o comportamento e a sensibilidade de cada premissa isoladamente. A cada derivada é atribuída uma letra grega,

sendo esse conceito - análise das gregas - amplamente difundido no mercado.

δ é a primeira derivada da equação em relação ao preço da ação objeto, ou seja, a taxa de variação do preço da opção em relação ao preço do ativo objeto. É o coeficiente angular da curva que relaciona o preço da opção e da ação objeto, demonstrado por Hull (2003). A derivada parcial que relaciona a variação dos preços de uma opção com o decorrer do tempo é conhecido pelo teta (θ) de um portfólio, a tudo mais constante.

O tempo é medido em anos no modelo, porém o teta é especificado em dias. É possível calculá-lo considerando o ano civil (dividindo a fórmula por 365 dias) ou pelo número de dias úteis, 252. A segunda derivada da equação em relação ao preço da ação objeto, conhecido pelo gama (γ), reflete a taxa de variação de delta. Se γ é pequeno, a mudança de δ ocorre lentamente, e os ajustes necessários para manter neutro o delta de um portfólio de opções acontece com baixa frequência. Caso γ seja - positiva ou negativamente - alto, há maior sensibilidade de δ definido por Hull (2003). Vega mede a sensibilidade do portfólio de opções a mudanças na volatilidade; e rho ρ mede a sensibilidade a alterações das taxas de juros.

2.2 Estudos Empíricos Subsequentes

A partir de B-S, estudos empíricos foram aplicados visando identificar a robustez do modelo, tendo como exemplos Dumas, Fleming e Whaley (1998); MacBeth e Merville (1979); Chiras e Manaster (1978); Gultekin, Rogalski e Tinic (1982), sendo um dos principais achados o sorriso da volatilidade implícita. Os testes feitos por Gultekin, Rogalski e Tinic (1982) e MacBeth e Merville (1979) encontraram resultados opostos para a estimativa de opções dentro e fora do dinheiro, porém Gultekin apresenta resultados de acordo com Black (1975) e Merton et al. (1973).

Opções que estão 'dentro do dinheiro' e 'fora do dinheiro' têm maiores volatilidades implícitas do que as opções 'no dinheiro'. A sub-precificação de opções no dinheiro e super-precificação de opções fora do dinheiro pode ser parcialmente explicada pela suposição de B-S dos retornos estocásticos contínuos. Merton (1976) incorpora a ideia de saltos nos retornos da ação objeto, complementando B-S. A ideia de saltos (entendido como uma interrupção na evolução dos preços da ação objeto advinda de uma nova informação) nos retornos da ação objeto dá mais robustez aos resultados do modelo, especialmente quando para opções de curto prazo.

2.2.1 Incorporação de Eventos não Antecipados

Merton (1976) chama atenção para a propriedade apresentada no modelo de B-S, que diz respeito à taxa de variação no preço da ação objeto em pequenos intervalos de tempo. Para Black & Scholes, os preços da ação objeto são um movimento contínuo no tempo. A validade do modelo depende dessa suposição, tendo em vista que qualquer processo discreto no tempo - da 'correta' trajetória do preço da ação objeto - em que ocorra um salto, provoca uma possibilidade de arbitragem em relação à estimativa de B-S. Merton propõe internalizar o processo de salto nos preços para um processo estocástico e período continuamente variável.

A razão para a qual há essa necessidade deve-se ao fato de se observar uma quantidade significativa de outliers nas amostras de dados. Pode-se argumentar em favor do autor que essa ocorrência manifestou-se mesmo com a escassez de dados intradiários, o que tende a ocultar movimentos abruptos nos preços dentro de um mesmo dia.

Esses saltos originam-se da chegada de novas informações a respeito da empresa, ou seja, são informações que afetam apenas a parte não sistemática do risco de mercado. Por definição, uma nova informação importante chega ao mercado em um momento discreto no tempo. Merton divide o processo de evolução dos preços da ação objeto em momentos quietos e ativos, e, como se assume que estes são discretos no tempo e ocorrem de forma aleatória, são estimados através de uma distribuição de Poisson, tal que:

$$\frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda K)dt + \sigma dZ + dq \quad (2.8)$$

α é o retorno instantâneo da ação objeto, σ^2 é a variância do retorno condicionada a não haver novas informações específicas que afetem seu preço. λ é a média esperada de eventos por unidade de tempo e dZ e dq são independentes em que dZ é a parte descrita de um evento não antecipado pelo mercado. K equivale a $(Y - 1)$, que representa o percentual de variação aleatório do preço da ação objeto caso o evento ocorra. Portanto, a trajetória do preço de uma ação percorrerá um processo contínuo por boa parte do tempo, com intervalos discretos em que ocorrerão saltos de tamanho finito.

Importante achado é que Merton (1976) identifica que não haverá um portfólio diversificado o suficiente que eliminará o risco de o salto ocorrer. A razão para isso é que a escolha de um portfólio é um processo linear, ao passo que a função de salto para o preço da ação não é. Na média, uma vez a cada $(1/\lambda)$ vezes ocorrerá um movimento não esperado. Na prática, seguindo a precificação do modelo de B-S, estando comprado em uma determinada ação e vendido em sua opção, o investidor irá consistentemente receber mais do que o valor esperado; entretanto, num evento raro de um salto, irá sofrer comparativamente uma grande

perda.

Em momentos que o mercado permanecer 'calmo', vendedores de opções obterão um retorno em excesso e compradores estarão perdendo. Quando o mercado tornar-se ativo, as perdas dos vendedores serão altas e compradores ganharão. Para Merton, as perdas de períodos ativos não se devem à fraca especificação da variância do modelo; o autor enfatiza que não existe uma variância finita capaz de internalizar esse comportamento de salto no preço. Essas diferenças ampliam-se para opções com períodos curtos de maturidade: opções muito dentro e muito fora do dinheiro, assim como de períodos mais curtos de maturação tendem a ser vendidas por preços maiores que o valor estimado por B-S, enquanto opções marginalmente dentro do dinheiro e de mais longo período tendem a ser vendidas por menos.

2.2.2 Diferentes Perspectivas para o Modelo

Contrapondo Merton (1976), Hull e White (1987) apresentam a precificação de opções com volatilidade estocástica, segundo Franco (2014) sendo "possível controlar os níveis de assimetria e curtose da distribuição dos retornos da ação adjacente... ...assume-se que a volatilidade é passada entre os períodos por difusão, numa trajetória temporal contínua". O comportamento de salto/difusão de Merton apresenta maior eficiência explicativa para ajustes de curto prazo, sendo o modelo de Hull com ajustes estocásticos da volatilidade melhor estimador para o longo prazo.

Hull utiliza um modelo de difusão bivariado, sendo a volatilidade da ação governada por um processo exógeno, como observa o trabalho de Duan (1995). Entretanto, a taxa de variância não é observada empiricamente. Desejando contornar esse problema, o autor propõe a precificação de opções através de um modelo generalizado de heterocedasticidade condicional auto-regressiva (GARCH, em inglês). Os três pontos principais que o diferem dos tradicionais modelos de precificação são: (i) o preço de uma opção é uma função do prêmio pelo risco embutida no ativo objeto; (ii) o modelo é 'não-Markoviano', isto é, não segue um processo de difusão; (iii) o modelo GARCH de precificação de opções tem potencial explicativo dos vieses sistemáticos já observados que são associados aos modelos de Black & Scholes, que são: sub-precificação de opções fora do dinheiro; opções com baixa volatilidade e opções com curto prazo de maturidade.

2.3 O Conceito de Valor Extrínseco

Hull (2003) explora o conceito de valor intrínseco e valor tempo. O valor intrínseco é o

valor observado caso o exercício fosse imediato, isto é, a diferença do preço da ação e do preço de exercício. O prêmio pelo tempo e pelo risco é o valor extrínseco de uma opção. Opções 'no dinheiro' e 'fora do dinheiro' não possuem valor intrínseco, apenas extrínseco. Já opções 'dentro do dinheiro' possuem tanto valor intrínseco quanto mais dentro do dinheiro encontram-se. Uma alteração na incerteza - chegada de novas informações no mercado - sobre o preço do ativo subjacente pode alterar a trajetória do valor extrínseco no tempo (FRANCO, 2014).

A estimação de preços através do modelo de B-S passa pela acurácia na especificação da volatilidade futura do ativo subjacente. O valor extrínseco é a medida dessa expectativa futura, tendo em vista que o valor intrínseco reflete diferença entre preço de exercício e observado no tempo t . Em mercados emergentes como o brasileiro, a liquidez pode ser um fator a impactar a precificação de uma opção, além das expectativas futuras de volatilidade, podendo ser um dos componentes explicativos do comportamento de sorriso no cálculo da volatilidade implícita.

2.4 A Ótica da Liquidez para a Formação de Preços

Saatcioglu e Starks (1998) apresentam a relação entre preço e volume negociado, com enfoque especial para o caso do mercado de ações dos países da América Latina. Para o autor, existem diferenças significativas nas instituições e na forma como as informações são difundidas no mercado, fato que embasa a necessidade de um estudo específico para países em diferentes níveis de desenvolvimento. A amostra contou com Argentina, Brasil, Chile, Colômbia, México e Venezuela.

Mesmo os estudos que foram apresentados com amostras de dados dos Estados Unidos são divergentes em relação a suas conclusões, fato que se deve, em grande parte, ao método e amostra de dados utilizados. Apesar de algumas evidências empíricas com baixo grau de explicação, o autor conclui que há significância estatística para uma relação causal entre o volume de negociações promover os retornos (aumento de preços) do mercado, porém o contrário não é verdadeiro. Apesar disso, estudos sobre os efeitos da liquidez em mercados de derivativos com dados para países em desenvolvimento não são conhecidos até o presente momento.

Uma possível razão para isso pode dever-se ao fato de que, para os dados dos Estados Unidos, trabalhos como os de Vijh (1990); Anthony (1988); Chan, Chung e Fong (2002); Stephan e Whaley (1990), direcionavam esforços para explicar o comportamento dos preços através do volume negociado nos mercados, e não no poder de estimação dos modelos de precificação de derivativos em si. Vijh (1990) argumenta que o mercado de derivativos americano era

'profundo' o suficiente a ponto de não haver mudança significativa nos preços provocada por uma grande transação no mercado.

A ideia é que se uma grande transação no mercado de opções é motivada por uma nova informação, então seu preço alteraria significativamente. O que o autor conclui, basicamente, é que o efeito de uma grande transação não altera os preços dos derivativos, e, portanto, não há alterações de preço ocorridas pela chegada de nova informação - interação entre agentes informados e não informados. O que seria considerada nova informação, segundo o autor, pode ser apenas divergências de opiniões.

Anthony (1988) aborda a inter-relação entre os volumes de negociação no mercado de ativos e de derivativos. Black (1975) argumenta em favor de Anthony, que haja incentivos para que se privilegiem as negociações no mercado de derivativos em detrimento do mercado principal de ativos. As razões para isso são baixos custos de transação, baixa necessidade de capital e maior potencial de ganhos. Com algumas restrições, o autor conclui que, para grande parte da amostra, há em média um dia de defasagem entre transações nos dois mercados. Por fim, levanta a importância da utilização de dados intradiários para novos *insights* bem como a segmentação setorial.

Contrapondo-o, Chan, Chung e Fong (2002) utilizam dados de alta frequência em sua amostra, e argumentam que é o volume líquido no mercado que provoca revisões nas cotações do mercado de ações e de opções, sendo que uma movimentação na cotação em qualquer desses mercados resulta em novas revisões de cotações no outro (independente do mercado que se origina). Outro fator relevante é que, segundo os autores, no caso do investidor com melhores informações, há a presença de restrições de liquidez para operações mais agressivas no mercado de derivativos.

De forma semelhante, Stephan e Whaley (1990) já, à época, identificavam que a mudança dos preços dos ativos motivava a mudança dos preços no mercado de opções. A evidência ia na contramão do consenso no período; a inovação trazida foi a utilização de dados intradiários para uma análise aprofundada.

No Brasil, a dinâmica entre liquidez e preços é abordada nos estudos de Vieira e Milach (2008); Correia, Amaral e Bressan (2008). Correia busca identificar se o valor de mercado das ações também pode ser determinado pela sua liquidez. O que o autor observou foi uma relação positiva e linear entre retorno e liquidez das ações. Quanto maior a liquidez de um ativo, maior deveria ser seu valor.

Similarmente ao proposto pelo presente trabalho, Correia adicionou o componente de liquidez em um modelo de precificação. Em seu estudo, o CAPM, *capital asset pricing model* - para precificar ativos - levou em consideração o poder de explicação da liquidez sobre os pre-

ços. Conclui que esse efeito pode ser uma característica específica de mercados emergentes, e não exclui a possibilidade de a medida de liquidez ser uma *proxy* para algum tipo de risco não representado pelo modelo.

Vieira e Milach (2008) também defendem que o conceito de liquidez é multidisciplinar e que não há um conceito livre de ambiguidades e universalmente aceito. Como medida de liquidez, diversas *proxies* são aceitáveis, pois existem aspectos não capturados em uma única medida: preço e quantidades de negócios realizados, e *turnover* - razão entre volume negociado e quantidade de ações emitidas - são alguns exemplos. O autor faz a distinção entre liquidez de um ativo e liquidez do mercado como um todo, enfocando este em seu trabalho. Conclui que, para a amostra selecionada de dados brasileiros, existe uma relação entre retorno e iliquidez do mercado.

2.5 Estudos Contemporâneos sobre Volatilidade Implícita

A busca pelo aperfeiçoamento dos estimadores da volatilidade futura segue contemporaneamente como um objetivo de pesquisa. Não há uma forma hegemônica de estimação e estudos dividem-se em diferentes abordagens para a volatilidade implícita: Rebonato (2020) direciona esforços na busca de uma estimação da evolução da superfície da volatilidade implícita futura, encontrando forte dependência do ativo subjacente para a assertividade dos resultados.

Já Biktimirov e Wang (2017) comparam a eficácia da volatilidade implícita calculada pelo modelo de Black & Scholes e demais modelos para 13 diferentes índices de mercado; Chance et al. (2017) demonstram o viés do sorriso da volatilidade implícita de B-S mesmo sob condições ideais de mercado; e Bärholm (2017) busca explicar o comportamento do sorriso da volatilidade implícita em regiões próximas a saltos, tal qual definido anteriormente por Merton (1976).

A questão de pesquisa atualmente levantada por Biktimirov e Wang (2017) visa validar a eficácia do modelo de Black & Scholes na estimação da volatilidade implícita futura, comparando-a a diferentes modelos de previsão. O autor utiliza 13 índices de mercados americanos, europeus e asiáticos para teste. Expõe que há certo consenso acerca de que a melhor estimativa para a volatilidade futura advém da volatilidade implícita, entretanto encontra poucas evidências em relação ao melhor modelo a estimar essa variável. Estudos pretéritos contradizem-se em termos de resultados obtidos: cita-se o trabalho que o autor desenvolveu em 2011 juntamente com Wang, obtendo que o modelo de B-S não seria o mais eficiente; estudos de Stall (2007) e Muzzioli (2010) encontraram conclusões opostas.

É possível concluir que, apesar de o *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) ter alte-

rado o método de cálculo de opções de *model-based* para *model-free*, seus resultados apontam maior eficácia do modelo de B-S em prever a volatilidade futura tanto em mercados emergentes quanto em mercados desenvolvidos. A estimativa de volatilidade livre de modelos de precificação, *a priori*, teria duas vantagens: evita especificações imprecisas (condições ideais requeridas pelo modelo) e vale-se de uma gama maior de faixas de strikes para estimação (em B-S, são utilizadas apenas as opções no dinheiro).

Alguns estudos similares aos de Biktimirov e Wang (2017) foram aplicados a ações individuais, sem um claro vencedor. Os testes feitos pelo autor em amostra de 2005 a 2016 revelaram o maior r^2 para o modelo de volatilidade implícita de Black & Scholes como o mais eficaz estimador da volatilidade futura para os próximos 30 dias (mais especificamente, 22 dias úteis de negociação futuros).

Na sequência, um dos estudos recentes sobre o modelo de B-S desenvolvido por Chance et al. (2017) discutem a precisão do modelo mesmo sob condições ideais, ou seja, a hipótese de que há o sorriso da volatilidade mesmo quando não existem imperfeições de mercado. Para isso, precificou opções com a volatilidade conhecida, promovendo o processo de engenharia reversa para calcular a volatilidade implícita baseada na volatilidade assumida. Os padrões retornados foram distintos, sendo mais representativos em opções de curto prazo, notoriamente as mais negociadas nos mercados em geral e, mais ainda, no mercado brasileiro. A inovação trazida pelo autor é, portanto, que uma parte do sorriso da volatilidade não se deve à natureza econômica.

Chance et al. (2017) reconhecem que deve haver a mesma volatilidade implícita para diferentes *strikes* de um mesmo ativo subjacente, e que, em grande parte, o 'sorriso' da volatilidade não é simétrico - as inclinações da curva para fora e dentro do dinheiro não se sobrepõem. Observa que mesmo ao assumir volatilidade constante e continuidade de negociações - com zero custos de transação - permanece o comportamento em forma de sorriso. Até sua publicação não se conhece outro estudo que tenha abordado essa perspectiva intrínseca ao modelo, sendo observada em praticamente todos os dados colhidos pelo autor.

Em uma amostra de 2004 a 2010, os desvios apresentaram-se na totalidade dos dados a partir de uma distância de 10% de uma opção no dinheiro, e em alguns casos, já a 5%. Conclui que isolar os efeitos do algoritmo das imperfeições de mercado e da modelagem de risco é virtualmente impossível, porém levanta o problema de que essa especificação imprecisa pode levar a sinais de precificação errados e fracas estratégias de negociação. Também descreve que oportunidades de hedge e arbitragem que deveriam ser livre de risco podem conter uma zona significativa de incerteza.

A contribuição de Bärholm (2017) inicia pela utilização de dados de alta frequência, sendo

este um dos primeiros estudos sobre o tema com a utilização de uma amostra com esse volume de dados, segundo o próprio autor. Visa demonstrar o comportamento da volatilidade implícita perto de áreas de salto - chegada de nova informação - no mercado. O autor utiliza dados para cada minuto de transações de uma amostra de 2006 a 2010, calculando a volatilidade implícita de cada observação. Excluiu opções dentro do dinheiro em seu estudo por questões de liquidez (e também porque o índice VIX igualmente as exclui).

Conclui que o impacto dos saltos observados nas cotações do ativo subjacente na volatilidade implícita são estritamente dependentes do tipo de opção e da moneyness. Opções de compra dentro do dinheiro não devem apresentar comportamento significativamente diferente se há ou não saltos no ativo subjacente. Já as opções de venda que estão no dinheiro e fora do dinheiro são altamente reativas a mudanças em seu ativo.

Estes autores contemporâneos contribuem de forma específica para o presente estudo no que diz respeito ao entendimento mais abrangente acerca do comportamento de uma opção, visto que a utilização de dados de alta frequência é uma abordagem relativamente nova. Com esses artigos, reafirma-se a necessidade de estudos que aprofundem o entendimento do comportamento da volatilidade implícita sob a ótica do modelo de B-S, ainda robusto e eficaz em sua estimação. Adicionalmente, busca-se adaptar os motivadores que possam explicar o comportamento de sorriso/distorção na volatilidade implícita para a realidade do Brasil, em que liquidez possa ter um efeito significativo. Passa-se, então, ao desenvolvimento das hipóteses do estudo.

2.6 Desenvolvimento das Hipóteses

Pautando-se nos conceitos ora desenvolvidos, é possível extrapolá-los a fim de que se apresente três hipóteses para o presente estudo. A pesquisa com os dados brasileiros, aliada à alta frequência de observações da amostra permite que se reafirme e estenda o entendimento de que há, no mercado brasileiro, o 'efeito sorriso' para as opções de compra das firmas observadas durante o período. Desde Black (1975) a Rebonato (2020) visa-se explorar vieses entre a estimação do modelo e preços negociados no mercado; tais estudos carecem de maior quantidade de dados, e restringem-se a mercados cujas negociações ocorrem com maior frequência e volume. A relação positiva entre tais diferenças de volatilidades implícitas e o preço de exercício é, portanto, a primeira hipótese a ser testada:

H1: O 'efeito sorriso' impacta positivamente nas diferenças de volatilidades implícitas para opções de compra no Brasil, para um mesmo ativo subjacente.

A assertividade do modelo foi medida em estudos com dados de mercados dos Estados

Unidos, tendo alguns exemplos em Dumas, Fleming e Whaley (1998); MacBeth e Merville (1979); Chiras e Manaster (1978); Merton (1976); Gultekin, Rogalski e Tinic (1982), corroborando a hipótese de que o cálculo da volatilidade implícita pelo modelo apresenta diferenças sistemáticas, relacionando-as positivamente com a *moneyness*. Aplicado a dados de fim de dia e para o mercado internacional, o presente estudo revisita o conceito através da primeira hipótese, valendo-se de dados de alta frequência a fim de trazer novas - e robustas - evidências para os achados. O 'efeito sorriso' no mercado brasileiro pode não representar estritamente a relação positiva entre preço de exercício e cotação do ativo subjacente, o que motiva não apenas o desenvolvimento da primeira hipótese, mas também o da segunda. Com isso, a segunda hipótese do estudo busca identificar se as *proxies* desenvolvidas para volumes negociados (liquidez) possam influenciar, em sentido oposto, estes desvios:

H2: A liquidez influencia negativamente na magnitude das diferenças entre volatilidades implícitas de um mesmo ativo subjacente.

Esta hipótese adapta, para o mercado de derivativos, estudos que buscaram identificar tal relação com os preços negociados em mercados de ativos, já exposto em Correia, Amaral e Bressan (2008); Vieira e Milach (2008). Leva-se em conta seu potencial explicativo e aparentes ambiguidades nos resultados de diferentes estudos. Presume-se que a liquidez possa influenciar nestas magnitudes, especialmente pelo fato de as diferenças entre volumes negociados em opções das diferentes empresas listadas apresentar maiores variações de quantidades, se comparada à negociação no mercado de ativos. A preocupação dos estudos internacionais, como em Anthony (1988); Vijh (1990); Stephan e Whaley (1990); Saatcioglu e Starks (1998); Chan, Chung e Fong (2002), é direcionada na relação entre os mercados de ativos e de derivativos, e como se dá a dinâmica da internalização de novas informações.

Adicionalmente, a construção da terceira hipótese revisita as contribuições feitas por tais estudos destacados (especialmente os de caráter empírico, também motivadores da primeira hipótese) argumentando que os ajustes lineares das variáveis de interesse (isto é, *moneyness* e tempo decorrido) são tomados como 'apropriadamente' aderentes à dimensão das diferenças entre as volatilidades. Portanto, a última hipótese revisita tal entendimento:

H3: O ajuste quadrático das variáveis de tempo e moneyness é relevante para explicar a dinâmica entre diferenças de volatilidades implícitas de um mesmo ativo subjacente.

Uma possível evidência em favor de H3 pode ser o fato de os preços entre opções curtas e longas não serem exatamente proporcionais - explorado em diversos conceitos e estratégias, como as apresentadas em Cohen (2005) - podendo ser indicativos de que haja pontos em que tempo até o exercício e *moneyness* apresentem-se de forma quadrática. A partir das hipóteses desenvolvidas, avança-se aos procedimentos metodológicos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa tem por finalidade buscar possíveis determinantes para as diferenças entre volatilidades implícitas observadas e sua estimativa sob condições ideais, no mercado brasileiro, para as opções de compra, com dados disponíveis do período de março a dezembro de 2019. Direcionando esforços em empresas cujas opções detêm diferentes volumes negociados (alta, média e baixa liquidez de negociações) e de caráter explicativo, o trabalho visa o aprofundamento do conhecimento da realidade. A preocupação central é identificar os fatores que possam influenciar, e, conseqüentemente, determinar a ocorrência do objetivo delimitado, conforme visto em Gil (2008). A estruturação lógica do capítulo dá-se na seguinte sequência: primeiro são apresentadas as variáveis de interesse, as regressões utilizadas e, por fim, os dados coletados e seus critérios de ajuste.

3.1 Variáveis de Interesse e Regressões Utilizadas

A busca por possíveis determinantes das diferenças entre volatilidades implícitas explorou dados das opções de compra de doze empresas listadas no mercado brasileiro com diferentes volumes de negociações, escolhidas sob alguns critérios objetivos, detalhados na sequência. Utiliza-se quatro diferentes regressões e duas diferentes variáveis dependentes em seu método, em um esforço que visa obter uma maior compreensão sobre o tema, minimizando possíveis ambigüidades. As duas variáveis dependentes que são analisadas distinguem-se apenas no fato de uma delas ser ponderada.

3.1.1 Variáveis Dependentes

A primeira variável dependente resulta da diferença aritmética entre a volatilidade implícita da opção negociada no tempo λ e a correspondente volatilidade implícita de uma opção negociada o mais próximo possível da cotação do ativo subjacente no instante de tempo observado, sendo esta uma opção no dinheiro (ATM), como observado em 3.1:

$$Dif_{\lambda} = Vol_{\lambda} - Vol(ATM)_{\lambda} \quad (3.1)$$

A segunda variável dependente analisada leva em seu cálculo a razão das diferenças encontradas na primeira e a volatilidade ATM. Com isso, em ambas, o nível absoluto de volatilidade

de uma dada empresa não impacta na base de comparação entre as empresas analisadas:

$$\frac{Dif_{\lambda}}{VI_{\lambda}} = \frac{Vol_{\lambda} - Vol(ATM)_{\lambda}}{Vol(ATM)_{\lambda}} \quad (3.2)$$

Nas duas equações, Vol é o termo que representa a volatilidade implícita da opção utilizada. Assim como são duas as variáveis dependentes, são também as *proxies* desenvolvidas a fim de captar o volume de negociações em opções. Para cada variável dependente foi desenvolvida uma regressão específica.

3.1.2 Variáveis Independentes

A primeira variável de liquidez levou em consideração os preços e quantidades negociados no mercado de opções, ponderado pela mesma medida no mercado de ativos, no tempo λ . A segunda variável utilizada priorizou apenas os preços e quantidades negociados no mercado de opções, em sua forma logarítmica. *Moneyness* é a conhecida relação entre a cotação do ativo subjacente e o preço de exercício da opção, e, para o objetivo do estudo, esta relação foi extraída em módulo; as relações, portanto, são positivas independentemente se a opção se encontrar dentro do dinheiro (ITM) ou fora do dinheiro (OTM).

A variável tempo até exercício é a dotação, em anos, da diferença entre o momento em que se efetivou a negociação e o prazo em que este contrato será exercido ou irá expirar sem valor. Tanto *moneyness* quanto o tempo até exercício foram elevados ao quadrado, a fim de testar a hipótese 3. Por fim, utiliza-se como medida de taxas de juros livre de risco a taxa Selic vigente no período. Resumem-se as variáveis analisadas na seguinte tabela, identificando, a partir dos estudos pretéritos, as relações esperadas das variáveis independentes sobre as dependentes:

Tabela 1: Variáveis Utilizadas

Variáveis	Descrição	Relação esperada	Referência
Dependentes			
Dif	Diferença entre volatilidades implícitas	-	-
Dif/VI	Relação entre diferenças de volatilidades implícitas e a volatilidade implícita ATM	-	-
Independentes			
S/K	Relação entre cotação do ativo subjacente e <i>strike</i>	Positiva	Dumas (1998)
(S/K) ²	Relação entre cotação do ativo subjacente e <i>strike</i> ao quadrado	-	-
p.q(A)	Multiplicação entre preços e quantidades negociadas no mercado de ativos	Negativa	Correia (2008)
p.q(D)	Multiplicação entre preços e quantidades negociadas no mercado de derivativos	Negativa	Correia (2008)
T - t	Tempo até o exercício	-	-
(T - t) ²	Tempo até o exercício ao quadrado	-	-
i	Taxa de juros livre de risco - SELIC	-	-

Fonte: Elaboração própria.

Estudos pretéritos não demonstram se há interação nas diferenças entre volatilidades implícitas advindas das taxas de juros, e se este impacto pode ser positivo ou negativo. Espera-se que o prêmio de uma opção seja positivamente relacionado às taxas de juros livres de risco da economia. Da mesma forma, a passagem do tempo tende a influenciar o prêmio da opção, e não especificamente em sua volatilidade implícita. Pelo fato de uma opção ser uma série temporal, o tempo afeta negativamente o prêmio deste instrumento. Não são amplamente difundidos na literatura os estudos de tal relação: encontram-se artigos que relacionam a passagem do tempo na evolução do formato da superfície de volatilidade implícita, como em Cont e Da Fonseca (2002) e não como um fator que motive estas diferenças em primeiro lugar.

3.1.3 Modelos de Regressão

Quatro modelos de mínimos quadrados ordinários são testados, segmentados para cada empresa, podendo se observar as devidas especificidades, especialmente aquelas relacionadas à quantidade de negócios no período, bem como diferentes volatilidades entre empresas no mercado de ativos. As variáveis de interesse que se repetem nas quatro regressões são: *moneyness* e o seu quadrado, o tempo até o exercício e o seu quadrado, e as taxas de juros livres de risco. Na primeira regressão, a variável dependente é a diferença aritmética entre as volatilidades implícitas calculadas, e a *proxy* para liquidez utilizada foi a relação entre preços e quantidades em mercados de derivativos e ativos:

$$Dif_{\lambda} = \alpha + \beta_1 \frac{p.q(D)_{\lambda}}{p.q(A)_{\lambda}} + \beta_2 \frac{S_{\lambda}}{K_{\lambda}} + \beta_3 \left(\frac{S_{\lambda}}{K_{\lambda}}\right)^2 + \beta_4(T - t_{\lambda}) + \beta_5(T - t_{\lambda})^2 + \beta_6 i_{\lambda} + \varepsilon \quad (3.3)$$

Moneyness, tempo até exercício, suas funções quadráticas e taxas de juros livre de risco também integram-na. A segunda regressão mantém a mesma variável dependente e diferencia-se unicamente no que diz respeito à variável de liquidez, que em 3.4 é representada pelo logaritmo de preços e quantidades negociadas em opções:

$$Dif_{\lambda} = \alpha + \beta_1 \log[p.q(D)]_{\lambda} + \beta_2 \frac{S_{\lambda}}{K_{\lambda}} + \beta_3 \left(\frac{S_{\lambda}}{K_{\lambda}}\right)^2 + \beta_4(T - t_{\lambda}) + \beta_5(T - t_{\lambda})^2 + \beta_6 i_{\lambda} + \varepsilon \quad (3.4)$$

As regressões 3.5 e 3.6 são idênticas em variáveis independentes, respectivamente à 3.3 e

à 3.4, diferenciando-se em suas variáveis dependentes. Neste caso, as duas últimas regressões ponderam as diferenças entre volatilidades implícitas pela volatilidade da opção no dinheiro:

$$\frac{Dif_{\lambda}}{VI_{\lambda}} = \alpha + \beta_1 \frac{p.q(D)_{\lambda}}{p.q(A)_{\lambda}} + \beta_2 \frac{S_{\lambda}}{K_{\lambda}} + \beta_3 \left(\frac{S_{\lambda}}{K_{\lambda}}\right)^2 + \beta_4(T - t_{\lambda}) + \beta_5(T - t_{\lambda})^2 + \beta_6 i_{\lambda} + \varepsilon \quad (3.5)$$

As regressões 3.5 e 3.6 mantém as variáveis *moneyness*, tempo até exercício, taxas de juros. Enquanto o logaritmo de preços e quantidades aparece na última, a terceira utiliza como variável de liquidez as relações entre mercados de ativos e derivativos:

$$\frac{Dif_{\lambda}}{VI_{\lambda}} = \alpha + \beta_1 \log[p.q(D)]_{\lambda} + \beta_2 \frac{S_{\lambda}}{K_{\lambda}} + \beta_3 \left(\frac{S_{\lambda}}{K_{\lambda}}\right)^2 + \beta_4(T - t_{\lambda}) + \beta_5(T - t_{\lambda})^2 + \beta_6 i_{\lambda} + \varepsilon \quad (3.6)$$

A utilização destes modelos amplia o escopo de análise das variáveis de interesse, almejando maior robustez dos achados. As variáveis de liquidez utilizadas foram baseadas nos estudos de Correia, Amaral e Bressan (2008); Vieira e Milach (2008), já as demais variáveis são conhecidamente utilizadas em estudos empíricos - exemplos em Chiras e Manaster (1978); Dumas, Fleming e Whaley (1998). O desenvolvimento da variável dependente utiliza premissas do que se entende por uma opção se encontrar 'no dinheiro' ou fora desta classificação, sendo detalhada na seguinte seção, tal qual a forma de coleta dos dados e critérios utilizados em cada variável.

3.2 Dados Coletados e Critérios de Ajuste

O método a ser utilizado baseia-se na disponibilidade das informações coletadas. Os testes empíricos publicados após a exposição do modelo de estimação de preços por Black & Scholes estão galgados em amostras de dados de fim de dia, ou seja, para cada dia de operações há apenas uma observação - salvo por algumas publicações pontuais nos últimos anos, a exemplo de Bärholm (2017). Levanta-se a possibilidade de os ajustes de fim de dia não serem essencialmente suficientes para explicar a dinâmica de negociações efetuadas neste tipo de mercado, e, conseqüentemente, em como a dinâmica dos prêmios negociados impacta na volatilidade implícita obtida através do modelo.

O aperfeiçoamento de técnicas de extração e tratamento da informação resultou em uma

maior riqueza de dados e, concomitantemente, em um maior nível de assertividade dos achados estatísticos do modelo. As amostras passaram a dispor de observações com intervalos de 60, 30, 15 minutos e até 1 minuto, passando a considerar os movimentos intradiários desses derivativos.

Apesar da evolução da disponibilidade de informações para análise, não se poderia eliminar de forma categórica a hipótese de que a quantidade de observações da amostra pudesse interferir na robustez dos resultados. O reflexo provocado por alterações nas cotações dos ativos subjacentes provoca grandes variações em curto período de tempo no prêmio da opção. Em pequenos intervalos não discriminados pela amostra dos dados, abre-se a possibilidade de não captação da trajetória fidedigna das variações da cotação de um derivativo, caso agreguem-se as observações em intervalos de tempo maiores.

Com o objetivo de minimizar esse risco e internalizando nos resultados todos os possíveis movimentos ou trajetórias do mercado, a amostra de dados para os derivativos no Brasil foi coletada em intervalos de 1 segundo, abrangendo praticamente todas as transações efetuadas no período observado, que vai de março a dezembro de 2019 das empresas observadas. O início da coleta de dados se deu em meados de 2020, período em que foi possível extrair dados completos de dez meses de transações. A origem dos dados advém do *File Transfer Protocole - FTP* -, em português, protocolo de transferência de arquivo extraído do site da BM&FBovespa - bolsa de valores brasileira - antes de tornar-se Brasil, Bolsa e Balcão (B3). Para que isso fosse possível, utilizou-se pacote de extração de dados de alta frequência, *Get HF data*, através do *software R*, cujos esforços em tornar livre a informação sobre dados intradiários devem-se a Perlin e Ramos (2016).

Justifica-se, para a utilização de uma base de dados com intervalos para cada segundo, o esforço estatístico em observar toda movimentação ocorrida em opções. Cada pequeno movimento ocorrido em um ativo subjacente afeta diferentemente sua gama de opções, sendo que uma variação no ativo subjacente em 2%, por exemplo, pode provocar alterações na ordem de 50 ou 60% em uma opção específica. Caso se utilize um intervalo de tempo maior, um ativo cuja variação de sua cotação no mercado se altera rapidamente tenderá a ocultar movimentos mais significativos em suas opções.

Busca-se captar os movimentos o mais precisamente possível, a fim de que se minimize fatores exógenos à variável de interesse, sendo esta as diferenças nas volatilidades implícitas, e resultando em uma maior precisão dos achados. Em um universo de 86 diferentes empresas que apresentaram negócios no mercado de derivativos no período, selecionou-se as empresas levando em consideração a apresentação de, no mínimo, 200 observações. Ademais, foram coletadas preferencialmente empresas com apenas uma classe de ações negociadas. Isso pos-

sibilitou trabalhar com dados precisos, evitando ajustes em *strikes* negociados.

Utilizou-se, portanto, dados das opções de compra de 12 empresas de diferentes setores e volumes negociados (tanto em ativos quanto em derivativos), o que permite uma análise aprofundada para o escopo do estudo - empresas com menos de 200 observações foram retiradas da amostra, evitando potenciais distorções oriundas da volatilidade calculada de uma opção no dinheiro. No total, a amostra conta com 276.081 observações, sendo que Vale representa 81% deste total (223.531). Esta foi privilegiada na coleta de dados em favor de Petrobras, com similar volume negociado. Este fato deve-se a ambas representarem empresas de maiores volumes negociados no período para fins de análise, optando-se pela firma com melhor assertividade em seus dados.

Há apenas ações ordinárias para Vale, ao passo que há duas classes de ativos para Petrobras; ademais, ocorreu única data ex-dividendos em 26 de dezembro de 2019 em relação às quatro ocorrências para PETR3 e cinco para PETR4 (requerendo ajustes nos *strikes*), o que favorece a correção dos dados e minimiza associação imprecisa entre opções que se referem a cada classe do mesmo ativo. Demais empresas possuem volumes negociados significativamente menores, Ambev e Via Varejo destacam-se neste subgrupo, com amostras de mais de 10 mil observações; em nível intermediário, está o fundo do índice Bovespa (Bova11) e Lojas Americanas; já opções com menores negociações no períodos são de Marfrig e Embraer, visto na figura 2.

A unificação dos dados da base de ativos e derivativos apresentou desafios particulares no que diz respeito ao casamento de cotações, *tickers* e cruzamento destes dados com a precisão de tempo requerida pelo modelo. Foi necessária uma base de dados externa (mediadora) para associação correta do código do derivativo à ação respectiva (pois, no Brasil, temos diferentes classes de ações de uma mesma empresa), bem como o *strike* a que se refere (alguns destes códigos não guardam correspondência exata ao *strike* negociado). Priorizou-se, dada a quantidade de informação, empresas com nenhum ou poucos pagamentos de dividendos no período, pois, diferentemente do mercado americano, no Brasil os preços de exercício de *calls* e *puts* são ajustados à data ex-dividendo.

Para a unificação da base de interesse, foi necessário certificar-se da data em que os preços de exercício se tornariam ex-dividendo, fazendo os ajustes na base de derivativos. A inclusão dos preços de exercício na base de derivativos levou em consideração a divulgação do pagamento de proventos nos respectivos *sites* de relação com investidores de cada companhia, a fim de que se certifique que os ajustes não perderiam precisão explicativa. Foram, então, associados os preços de exercício aos respectivos códigos negociados, ajustando-os para o pagamento de proventos. Estes *tickers* foram associados aos seus ativos subjacentes - priorizou-se ativos

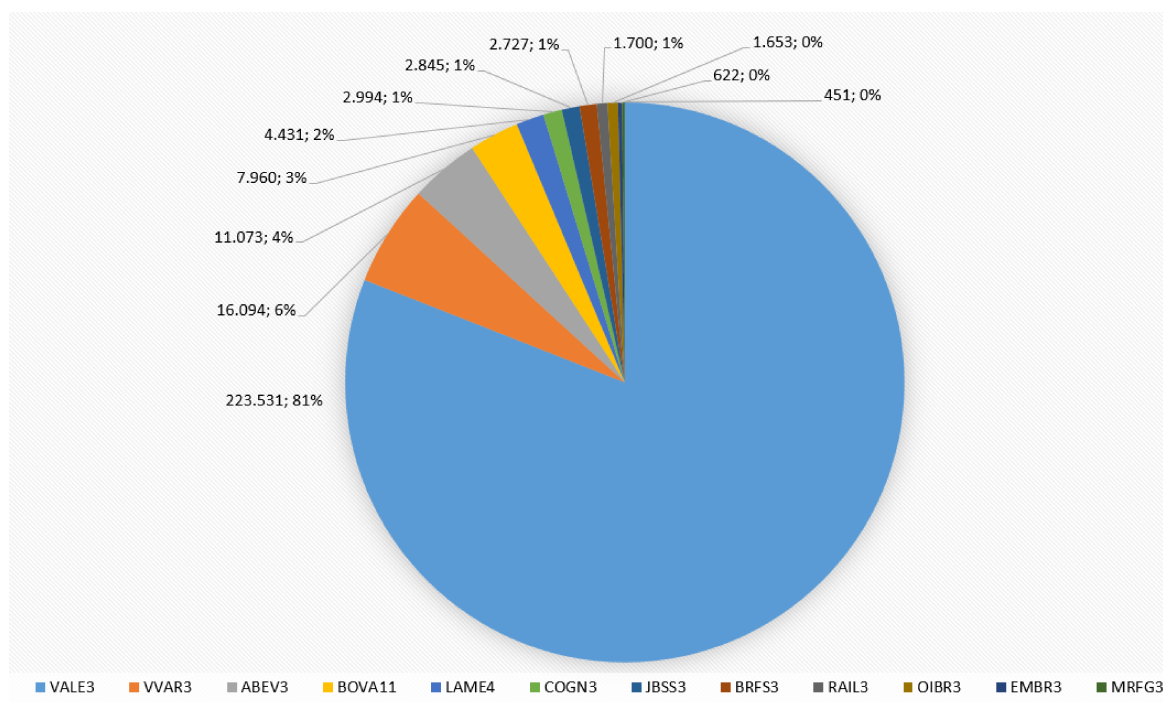


Figura 2: Total de Observações Utilizadas

Fonte: Elaboração própria.

negociados no segmento de novo mercado, em que há ações ordinárias exclusivamente, como medida a minimizar a possibilidade de associação imprecisa.

As bases de ativos e de derivativos foram unificadas utilizando-se o critério de proximidade temporal, em que o momento de negociação do derivativo foi a referência principal, buscando correspondência exata com a base de ativos. Em períodos que não há associação para o segundo da negociação ocorrida, associou-se a negociação imediatamente mais próxima em termos temporais. A título de exemplo, do total de observações de Vale, aproximadamente 50% de sua amostra apresentou associação exata. Em favor deste dado, é notório na literatura que um número representativo de estratégias com opções utilizam concomitantemente a compra ou venda do ativo subjacente no momento da efetivação do negócio (seja para alavancagem de ganhos, gerenciamento ou limitação de riscos, redução do custo de aquisição do ativo, entre outros), além da utilização de diferentes opções (comprando e vendendo-nas em um mesmo tempo λ) em uma estratégia com derivativos, como observado em Cohen (2005).

Adicionalmente, informações como quantidade, volume e número de negócios estão integradas nesta base a fim de que se possa dimensionar a relação entre liquidez e diferenças de volatilidades implícitas. Demais variáveis foram incluídas à amostra visando possibilitar,

em primeiro lugar, a estimação da volatilidade implícita pelo modelo de Black e Scholes para cada observação. A cada série mensal de opções foi atribuída sua respectiva data de exercício, padronizado para as 13h, horário limite em que se encerram as liquidações dos derivativos daquela série no dia do exercício. Com isso, desenvolveu-se a variável tempo até o exercício, em que é a diferença em anos (requerida pelo modelo) entre o momento de negociação da opção de compra e a data de expiração deste contrato. Como *proxy* para a taxa livre de risco para o período, convencionou-se a taxa básica da economia, Selic, para o cálculo, ajustando conforme as reuniões efetuadas pelo Comitê de Política Monetária (COPOM) do período.

Reúnem-se então as variáveis-chave para a estimação da volatilidade implícita de uma opção. Através do prêmio observado na opção negociada no mercado de derivativos, da cotação do ativo subjacente observado no mesmo momento temporal, do tempo até o exercício da opção, de seu preço de exercício, e da taxa de juros livre de risco, pode-se obter a volatilidade implícita correspondente àquela observação através da utilização do método de Newton-Raphson. Para cada observação de opção de compra, há uma correspondente - e diferente - volatilidade implícita calculada. Como *proxy* da volatilidade do ativo subjacente no tempo λ (aos moldes do que foi exposto pelo modelo de Black e Scholes), convencionou-se a volatilidade implícita de uma opção que se encontra no dinheiro (preço de exercício idêntico ou o mais próximo possível da cotação do ativo subjacente) para o desenvolvimento da variável dependente.

Há certo nível de subjetividade, sem referências inequívocas na literatura, sobre o verdadeiro limite entre uma opção encontrar-se no dinheiro ou fora dele. Opções que se encontram com preço de exercício acima de 10% da cotação praticada são entendidas como fora do dinheiro, assim como estão dentro do dinheiro as que apresentarem os mesmos limites inferiores - como evidenciado em Franco (2014). Grande parte das negociações observadas são de opções no dinheiro ou muito próximas deste. Tome-se como exemplo a amostra de dados de Vale: 143.979 das 223.531 (64,4%) observações de negociações efetuadas no período referem-se a opções cujos *strikes* não ultrapassam 5% acima ou abaixo da cotação naquele instante; 202.514 (90,6%) não ultrapassam os limites - superior e inferior - de 10% em relação à cotação.

Conforme anteriormente mencionado, questões específicas sobre o ativo, como volatilidade e liquidez, explicam este grau de subjetividade do conceito, ainda mais levando-se em consideração a quantidade de dados utilizados neste estudo (com intervalos pequenos de tempo) e o iterativo processo de ajuste requerido para que as opções se encontrem exatamente 'no dinheiro' - identidade entre *strike* e preço.

Para a obtenção da variável dependente, utilizou-se a diferença entre a volatilidade im-

plícita observada no instante λ naquela opção, comparando-a a uma opção negociada em um mesmo instante λ (ou o mais próximo possível) que estivesse 'no dinheiro'. Por exemplo: no dia 13 de agosto de 2019, o ativo da empresa Vale estava sendo negociado a 46,65 reais. Às 16 horas, 29 minutos e 8 segundos houve uma negociação de uma opção cujo *strike* estava 7,65% acima da cotação daquele instante (ou seja, 50,22 reais). A opção em que o preço de exercício era o mais próximo da cotação deste ativo no mesmo momento temporal era a VALEH468, que se refere à opção de compra de Vale, de exercício 'H' (válida até 19 de agosto de 2019), tendo o preço de exercício do contrato de R\$ 46,72 (diferença de 0,15% entre cotação e *strike*, e, portanto, 'no dinheiro'). Pega-se, então, as duas volatilidades implícitas obtidas deste par de opções, e obtém-se as diferenças encontradas naquele instante λ .

Como este tipo de ajuste é dinâmico no tempo, e levando em consideração a disponibilidade dos dados - além do fato de se almejar a coleta de uma subamostra de dados suficiente para cobrir a hipótese de saltos de volatilidade tal qual explicitada por Merton (1976) - as margens de tolerância do que se entende por uma opção 'no dinheiro' variaram conforme cada empresa, não ultrapassando diferenças de 3%. Com a maior disponibilidade de dados, e, portanto, apresentando-se como uma empresa cujos derivativos têm maior liquidez, para Vale foram obtidas opções no dinheiro que se encontravam com diferenças de até 0,5% entre preço de exercício e cotação no instante λ .

Mesmo com a menor margem de diferença, foi possível obter uma medida de volatilidade implícita para cada 4 minutos de negociação no mercado (em média). Via de regra, as margens de tolerância das demais subamostras ficaram entre 1 e 2% (à exceção de Oi, que se utilizou tolerância de 3% devido à relativa escassez de observações no dinheiro). Levou-se em consideração a proporcionalidade entre as amostras de cada empresa e sua subamostra de opções no dinheiro. As subamostras de opções no dinheiro visaram acomodar um mapeamento adequado de volatilidades ao longo do período e, ao mesmo tempo, evidenciar as diferenças entre os negócios realizados de diferentes *strikes*.

Com 11.073 observações coletadas, Ambev apresentou 3.329 observações no dinheiro para um nível de 2% de tolerância entre *strike* e cotação do subjacente no instante λ (29,25%); o índice Bova11, com 1,5% de tolerância, apresentou aproximadamente 40% de suas observações no dinheiro - 3.232 de um total coletado de 7.960. Das opções de Brasil Foods, 807 de 2.727 observações estão até 2% da cotação captada pela amostra. Para Cognac, 466 observações (de 2.994 coletadas) no mesmo intervalo de tolerância, JBS apresenta 510 das 2.845 observações no dinheiro também a 2%.

Embraer, a 2%, tem 16,72% de dados no dinheiro (104 de 622). Com volume intermediário (16.094 observações), Via Varejo tem 3.558 negociações observadas com tolerância de 2%,

Rumo, 283 de 1700 a 1%; Oi, a 3%, apresenta 500 de 1.653 observações; Marfrig 107 de 451 (a 2%) e, finalmente, a 2% de tolerância, Lojas Americanas têm uma subamostra de 500 dados (em relação aos 4.431 coletados no período).

Para o desenvolvimento das variáveis dependentes, além das diferenças simples entre volatilidades, um desdobramento desta variável foi sua ponderação com a volatilidade implícita no dinheiro, conforme anteriormente descrito. *Moneyness* é a razão entre a cotação do ativo e o preço de exercício da opção. Relevante ressaltar que foram feitos os ajustes necessários para que opções dentro e fora do dinheiro estivessem parametrizadas (diferenças em módulo) para que a relação fosse adequadamente captada pelo modelo.

A relação entre volume negociado em derivativos e ativos utilizou a multiplicação de preços e quantidades observadas na negociação efetuada no instante λ . O tempo, em anos, até o exercício foi elevado ao quadrado, assim como a *moneyness*, possibilitando a análise da hipótese 3 da pesquisa. Como destacado na delimitação do estudo, a relativa escassez de dados para opções de venda e a necessidade de ajustes particulares para a análise de sua base de dados, resultaram na utilização exclusiva de opções de compra.

Devido ao fato de os valores de *outliers* serem extremos, foi feita a *winsorização* da base de dados a 1%. Portanto, as empresas objeto de análise foram: Ambev, o fundo do índice Bovespa - Bova11, Brasil Foods, Cogna (com dados a partir de sua reclassificação na B3, em outubro de 2019), Embraer, JBS, Lojas Americanas, Marfrig, Oi, Rumo, Vale e Via Varejo. Passa-se, então, à análise das regressões desenvolvidas e dos resultados obtidos.

4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Esta seção apresenta os resultados obtidos através das quatro regressões especificadas das 12 diferentes empresas; suas estatísticas descritivas bem como a matriz de correlação das variáveis independentes estão dispostas no apêndice do presente estudo. Os dados constantes nas tabelas estão apresentados em ordem decrescente do número de observações de cada empresa. São utilizados seus códigos da B3 para se referir a elas, quais sejam: Vale (VALE3), Via Varejo (VVAR3), Ambev (ABEV3), Fundo *Ishares* Ibovespa Fundo de Índice (BOVA11), Lojas Americanas (LAME4), Cognac (COGN3), JBS (JBSS3), Brasil Foods (BRFS3), Rumo (RAIL3), Oi (OIBR3), Embraer (EMBR3) e Marfrig (MRFG3). Para se corroborar as hipóteses desenvolvidas, utiliza-se como aceitável coeficientes estatisticamente significativos ao nível de, pelo menos, 5%.

4.1 Regressão 1: Diferenças Simples

A tabela 2 apresenta os resultados obtidos utilizando-se como variável dependente as diferenças entre a volatilidade implícita da opção no tempo λ e sua volatilidade no dinheiro (ATM). Nesta tabela, o volume negociado é dado pela razão entre preços e quantidades observadas nas opções e ações no tempo dado. Cabe destacar que o resultado do teste de Breusch-Pagan não apresentou robustez para homocedasticidade dos resíduos sem tratamento. Isso implicou corrigir os erros padrão consistentes para heterocedasticidade e autocorrelação através do método de Newey-West. Tal procedimento é o mais apropriado para o tratamento de grandes amostras de dados, como aponta Gujarati (2012). Assim, as quatro regressões foram estimadas por mínimos quadrados ordinários em um regressão linear robusta.

Com mais de 80% das observações, Vale apresenta significância de todos seus coeficientes a 0,1%. Apesar disso, a *proxy* para volume de negociações apresenta baixa magnitude como um possível determinante da diferença entre volatilidades implícitas. Observa-se, também, que as variáveis de *moneyness* e tempo até o exercício podem não apresentar decaimento linear, pois há significância do seu ajuste quadrático. Alterações em taxas de juros livres de risco tendem a promover maiores diferenças entre volatilidades do que o volume de negociações observado em Vale - as demais empresas seguem esse mesmo padrão; por fim, apresenta um coeficiente de determinação de 0,246, o mais baixo entre as 12 empresas.

A revelação de que há relação significativa entre taxas de juros e diferenças entre volatilidades implícitas pode fomentar o desenvolvimento de novas hipóteses para estudos futuros, especialmente no que diz respeito à dinâmica de reajustes de taxas livres de risco possam im-

pactar nas precificações de diferentes opções. Por outro lado, a baixa interação entre liquidez e os desvios das volatilidades pode revelar outro possível componente (de prêmio adicional ao risco de exercício, por exemplo) que faça esta divergência ser consistente em diferentes mercados e ao longo do tempo, mas não relacionada à verdadeira volatilidade do ativo, bem como da liquidez negociada.

Assim, conforme esperado, há aumento das diferenças entre volatilidades implícitas quando se observa distanciamento entre preço de exercício e cotação do ativo subjacente, em favor da hipótese um. Já o tempo até o exercício tende a amenizar tais diferenças: estas são mais representativas ao passo que se aproximam de sua data de exercício (que é momento também em que ocorrem mais negociações, sendo um achado relevante à pesquisa). Cont e Da Fonseca (2002) explora a lógica de alterações da superfície de volatilidade implícita ao longo do tempo, Rebonato (2020) visa estimá-la; o presente achado revela-se parcialmente em sentido do que fora exposto. Tais superfícies tendem a ser 'melhor comportadas' em períodos mais longos de tempo, ao passo que ao serem mais intensamente negociadas, aproximando-se do exercício, tendem a divergir em maior magnitude. Os resultados, em geral, são congruentes entre empresas, como se observa na sequência.

Via Varejo é a segunda empresa com o maior número de negociações efetuadas no período (porém significativamente menor do que a primeira), tendo significância a 0,1% para todos seus coeficientes, exceto à taxa de juros livre de risco. Diferentemente de Vale, Via Varejo apresenta coeficiente negativo para o volume de negociações (o que seria mais apropriadamente esperado), porém com baixa magnitude. Salvo para o β das taxas de juros, o comportamento dos demais coeficientes assemelha-se à primeira empresa. O coeficiente de determinação é de 0,269, o segundo menor entre as empresas, o que pode ser levado em consideração no que diz respeito à dicotomia entre número de observações (intuitivamente como uma possível dimensão de liquidez) e a relevância das variáveis observadas na precificação de uma opção de compra.

Observando-se as demais empresas, estas apresentam relação positiva e significativa a 0,1% da variável *moneyness*, e - salvo por Lojas Americanas - sua variável quadrática apresenta relação negativa e mesma significância estatística. Negativamente relacionado às diferenças entre volatilidades implícitas, o tempo até o exercício é significativo para 11 das 12 empresas (exclui-se Marfrig deste caso), assim como sua variável quadrática.

Entretanto, acerca da relação das taxas de juros livre de risco e da *proxy* para liquidez: não há conclusão unívoca e generalizável às empresas analisadas. Os efeitos da liquidez, obtidas nesta regressão como a relação entre preços e quantidades em opções divididos pela mesma variável do ativo negociado, não são significativos para 6 das 12 empresas analisadas,

Tabela 2: Modelo de Regressão Utilizando Diferenças Simples

<i>Variável Dependente:</i> Dif												
<i>Empresa</i>	VALE3	VVAR3	ABEV3	BOVA11	LAME4	COGN3	JBSS3	BRFS3	RAIL3	OIBR3	EMBR3	MRFG3
p.q(D)/p.q(A)	0.002***	-0.004***	0.003**	-0.0004	0.011**	-0.003*	0.014**	0.001	0.0004	0.003	0.001	0.005
S/K	0.289***	0.899***	0.368***	0.289***	0.321***	0.502***	0.985***	0.474***	0.794***	1.419***	3.467***	1.152***
(S/K) ²	-2.222***	-3.785***	-1.321***	5.418***	0.322	-1.262***	-6.063***	-3.193***	-8.451***	-5.307***	-37.586***	-6.258***
T-t	-0.236***	-1.244***	-0.183***	-0.087***	-0.356***	-0.416***	-0.509***	-0.213***	-0.292***	-2.384***	-0.972***	-0.649
(T-t) ²	2.263***	10.451***	1.204***	0.459***	1.905***	1.818***	3.873***	1.348***	1.436***	14.104***	6.305***	2.463
i	0.195***	-0.114	-0.159***	-0.055**	0.755***	-0.103	0.886***	0.153***	0.401***	-	0.066	1.614***
α	-0.003***	0.043***	0.013***	0.006***	-0.026***	0.023***	-0.041***	-0.003***	-0.007*	0.089***	-0.022	-0.033
Observações	223,531	16,094	11,073	7,960	4,431	2,994	2,845	2,727	1,700	1,653	622	451
R ²	0.246	0.269	0.450	0.502	0.309	0.386	0.338	0.386	0.274	0.385	0.351	0.594
R ² ajustado	0.246	0.269	0.450	0.501	0.309	0.385	0.336	0.384	0.272	0.383	0.345	0.589
DP dos Resíduos	0.008	0.039	0.008	0.008	0.017	0.017	0.023	0.011	0.016	0.066	0.016	0.025
Estatística F	12,131.640***	988.469***	1,507.885***	1,333.744***	330.450***	312.843***	241.213***	284.671***	106.532***	205.972***	55.420***	108.294***
Breusch-Pagan	14205***	1031.1***	750.28***	482.57***	86.479***	176.53***	184.66***	96.606***	38.639***	113.16***	75.412***	37.912**
	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 223524)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 16087)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 11066)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 7953)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 4424)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 2987)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 2838)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 2720)	p = 8.425e ⁻⁷ (gl = 6; 1693)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 5; 1647)	p = 3.16e ⁻¹⁴ (gl = 6; 615)	p < 1.17e ⁻⁶ (gl = 6; 444)

Nota: · p<0.1; *p<0.05; **p<0.01; ***p<0.001.

Fonte: Elaboração própria.

o que enfraquece corroborar a hipótese 2. Destas, 5 são empresas com as menores observações/número de negociações no período - Marfrig, Embraer, Oi, Rumo e Brasil Foods. Mesmo segregando-se a análise a apenas 6 empresas em que houve significância a pelo menos 5%, seus coeficientes não são congruentes, sem apontar para uma relação específica, vezes negativa à variável dependente (Via Varejo e Cognac), vezes positiva (em Vale, Ambev, Lojas Americanas e JBS). Seus coeficientes são pouco expressivos, sendo o maior deles o de JBS (0,013); os demais apresentam valores em sua terceira e quarta casas decimais.

As taxas de juros livres de risco não foram significativas para Via Varejo, Cognac e Embraer. Salvo por Bova11 (com significância a 1%), as demais obtiveram significância a 0,1%. 6 das 8 empresas com coeficientes significativos tem relações positivas com as diferenças entre volatilidades implícitas, exceto por Ambev e Bova11, o que reafirma a possibilidade de aprofundamento de novos estudos. Em tese, espera-se que o impacto das taxas de juros acentuem essas diferenças, como fora observado em aproximadamente 85% das observações objeto de análise.

Os coeficientes de determinação crescem à medida que se diminui o tamanho da amostra, salvo por Ambev, Bova e Rail; enquanto esta apresenta 1,700 observações e 0,272 em seu r^2 ajustado, aquelas detêm respectivamente 11.073 e 7.690 observações e 0,45 e 0,50 da mesma medida de análise, o que pode ser interpretado por uma maior capacidade explicativa de algumas variáveis na medida em que se observam empresas cujos derivativos são menos negociados no período.

4.2 Regressão 2: Diferenças Simples

A tabela 3 mantém a variável dependente como a diferença simples entre volatilidades implícitas, ajustando a *proxy* para liquidez como a relação logarítmica do volume negociado em opções. De forma geral, observa-se algumas melhorias em significância dos estimadores, especialmente atreladas à nova variável. Os coeficientes de determinação dos modelos tendem a estabilizar-se ou apresentar melhoras na segunda e terceira casas decimais.

As relações observadas na tabela 2 para Vale permanecem, basicamente, inalteradas; Via Varejo apresenta significância no segundo modelo de regressão para a variável taxas de juros livre de risco, a 5%, mantendo-se a relação negativa à variável dependente. O logaritmo de preços e quantidades tem significância a 0,1% em Ambev, ao passo que a variável correspondente à liquidez na regressão anterior apresentava significância a 1% (mantém-se a relação positiva). Exceção às demais firmas observadas, JBS piorou seu nível de significância (a 1%) na variável de liquidez, mantendo-se a mesma relação (positiva) com a variável dependente.

Tabela 3: Modelo de Regressão Utilizando Diferenças Simples

<i>Variável Dependente:</i> Dif												
<i>Empresa</i>	VALE3	VVAR3	ABEV3	BOVA11	LAME4	COGN3	JBSS3	BRFS3	RAIL3	OIBR3	EMBR3	MRFG3
ln p.q(D)	0.0003***	-0.003***	0.0002***	-0.0001	0.001***	-0.001**	0.001*	0.0001	0.001***	0.007***	-0.003***	-0.0003
S/K	0.296***	0.884***	0.370***	0.287***	0.325***	0.494***	0.992***	0.474***	0.796***	1.445***	3.589***	1.141***
(S/K) ²	-2.252***	-3.607***	-1.317***	5.386***	0.395	-1.291***	-6.019***	-3.180***	-8.457***	-5.185***	-39.873***	-6.278***
T-t	-0.246***	-1.190***	-0.188***	-0.085***	-0.367***	-0.389***	-0.526***	-0.216***	-0.301***	-2.442***	-0.894***	-0.928
(T-t) ²	2.336***	10.047***	1.242***	0.453***	1.900***	1.691***	3.987***	1.362***	1.453***	14.730***	6.051***	2.270
i	0.191***	-0.154*	-0.168***	-0.058**	0.771***	-0.075	0.888***	0.153***	0.373***	-	0.114	1.545***
α	-0.006***	0.062***	0.013***	0.007***	-0.034***	0.026***	-0.048***	-0.004***	-0.013**	0.041***	-0.005	-0.028
Observações	223,531	16,094	11,073	7,960	4,431	2,994	2,845	2,727	1,700	1,653	622	451
R ²	0.247	0.273	0.450	0.502	0.312	0.387	0.337	0.386	0.280	0.393	0.389	0.593
R ² ajustado	0.247	0.273	0.450	0.501	0.311	0.385	0.336	0.384	0.277	0.391	0.383	0.588
DP dos Resíduos	0.008	0.039	0.008	0.008	0.017	0.017	0.023	0.011	0.016	0.066	0.016	0.025
Estatística F	12,192.290***	1,006.524***	1,508.905***	1,334.158***	334.010***	313.710***	240.617***	284.737***	109.584***	212.990***	65.184***	107.914***
Breusch-Pagan	14500***	1015.6***	765.13***	475.93***	88.734***	177.55***	189.35***	98.624***	33.403**	123.98***	72.639***	45.14***
	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p = 8.77e ⁻⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p = 1.17e ⁻¹³	p < 4.39e ⁻⁸
	(gl = 6; 223524)	(gl = 6; 16087)	(gl = 6; 11066)	(gl = 6; 7953)	(gl = 6; 4424)	(gl = 6; 2987)	(gl = 6; 2838)	(gl = 6; 2720)	(gl = 6; 1693)	(gl = 5; 1647)	(gl = 6; 615)	(gl = 6; 444)

Nota: · p<0.1; *p<0.05; **p<0.01; ***p<0.001.

Fonte: Elaboração própria.

Embraer passa a apresentar relação negativa e estatisticamente significativa a 0,1% para a variável de liquidez, fato que vai de encontro à intuição desenvolvida pela hipótese dois; Lojas Americanas, Cogna, Rumo e Oi melhoraram a significância desta variável na segunda regressão, que, salvo Cogna a 1%, foi de 0,1% para todas as empresas. Assim como Vale, Bova11, Brasil Foods, e Marfrig permaneceram, basicamente, inalteradas em suas relações e coeficientes de determinação do modelo.

4.3 Regressão 3: Diferenças Ponderadas

Quando se observam os resultados apresentados na tabela 4, reafirmam-se as relações dos coeficientes de *moneyness* e tempo até exercício e suas versões quadráticas. A 0,1%, as 12 empresas apresentam relação positiva entre as diferenças observadas (ponderada pela volatilidade ATM) e a *moneyness*. Salvo por Lojas Americanas (10%) e Bova11 (5%) os demais coeficientes são significativos a 0,1% para sua relação quadrática. Negativamente à variável dependente, a relação do tempo até exercício corrobora o que fora exposto nas tabelas precedentes, salvo por Marfrig, em que a relação, apesar de negativa, é estatisticamente significativa a 1% e a 10% (da variável tempo ao quadrado). A dimensão quadrática das demais 11 empresas segue relação positiva a 0,1%.

Para a *proxy* de liquidez, novamente as mesmas 6 das 12 empresas apresentam algum nível de significância, a pelo menos 5%, sendo duas destas com seu coeficiente negativo. As empresas com menores observações (menos negociações no período) igualmente não apresentaram significância do estimador. As taxas de juros livres de risco apresentam significância a 0,1% para 9 empresas: Vale, Lojas Americanas, JBS, Brasil Foods, Rumo e Marfrig com relação positiva, e negativa para Via Varejo, Ambev e Bova11. O teste para homocedasticidade dos resíduos é robusto para as 12 empresas ao nível de 0,1% de significância.

De forma geral, segue-se o entendimento de estudos sobre liquidez ora mencionados, que, em primeiro lugar, levantam a possibilidade de a especificação da variável não representar estritamente a *proxy* desejada (seja por estar fracamente especificada, seja por captar outros fatores não relacionados). Ocasional, portanto, ambiguidades em seus coeficientes, conclusão que permite direcionar a novos estudos que visem identificar variáveis que possam captar a liquidez (como o *bid-ask spread*, por exemplo) ou a fatores que influenciem tais diferenças e não digam respeito à liquidez dos negócios.

Tabela 4: Modelo de Regressão Utilizando Diferenças Ponderadas

<i>Variável Dependente:</i> Dif / VI												
<i>Empresa</i>	VALE3	VVAR3	ABEV3	BOVA11	LAME4	COGN3	JBSS3	BRFS3	RAIL3	OIBR3	EMBR3	MRFG3
p.q(D)/p.q(A)	0.006***	-0.008***	0.010**	-0.001	0.027*	-0.008*	0.030**	0.002	0.001	0.005	0.004	0.011
S/K	0.987***	1.584***	1.634***	1.475***	1.060***	1.460***	2.363***	1.441***	2.988***	2.018***	13.185***	2.446***
(S/K) ²	-8.143***	-5.144**	-6.927***	24.098*	-1.210 *	-4.624***	-14.918***	-10.257***	-31.651***	-7.599***	-142.512***	-13.587***
T-t	-1.027***	-2.260***	-0.794***	-0.595***	-1.396***	-1.907***	-1.384***	-0.618***	-1.087***	-3.182***	-3.668***	-4.815**
(T-t) ²	9.840***	19.112***	5.250***	3.371***	9.883***	10.245***	11.733***	3.900***	5.491***	18.364***	23.627***	27.597
i	0.458***	-1.458***	-0.779***	-0.694***	2.491***	-0.564	1.737***	0.389***	1.618***	-	0.350	3.810***
α	0.005***	0.155***	0.063***	0.062***	-0.086***	0.100***	-0.075***	0.006***	-0.035*	0.123***	-0.089	-0.005
Observações	223,531	16,094	11,073	7,960	4,431	2,994	2,845	2,727	1,700	1,653	622	451
R ²	0.225	0.220	0.436	0.480	0.278	0.363	0.312	0.377	0.268	0.368	0.341	0.602
R ² ajustado	0.225	0.219	0.435	0.479	0.277	0.362	0.311	0.375	0.265	0.366	0.335	0.597
DP dos Resíduos	0.028	0.083	0.035	0.043	0.047	0.046	0.055	0.034	0.060	0.097	0.064	0.055
Estatística F	10.836.470***	755.213***	1.424.522***	1.221.642***	284.268***	283.425***	214.985***	274.135***	103.116***	191.628***	53.111***	112.114***
Breusch-Pagan	12081***	1139.6***	705.06***	533.99***	126.91***	200.46***	204.78***	97.186***	38.719***	120.41***	63.6***	50.37***
	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p < 2.2e ⁻¹⁶	p = 8.125e ⁻⁷	p < 2.2e ⁻¹⁶	p = 8.33e ⁻¹²	p = 3.96e ⁻⁹
	(gl = 6; 223524)	(gl = 6; 16087)	(gl = 6; 11066)	(gl = 6; 7953)	(gl = 6; 4424)	(gl = 6; 2987)	(gl = 6; 2838)	(gl = 6; 2720)	(gl = 6; 1693)	(gl = 5; 1647)	(gl = 6; 615)	(gl = 6; 444)

Nota: · p<0.1; *p<0.05; **p<0.01; ***p<0.001.

Fonte: Elaboração própria.

4.4 Regressão 4: Diferenças Ponderadas

A última tabela (5) mantém a variável dependente utilizada anteriormente, entretanto, difere-se da regressão 3.5 ao utilizar o logaritmo de preços de quantidades em opções como medida para liquidez. A utilização desta *proxy* para liquidez resulta em estimadores com maiores significâncias, sendo a liquidez ao nível de - pelo menos - 5%, relevante para 8 das 12 empresas. Bova11 não apresentou significância em nenhuma das regressões aplicadas às amostras, ao passo que Oi e Embraer passam a ter significância a 0,1%. Apesar disso, as relações não são generalizáveis: Via Varejo, Cogna e Embraer apresentam coeficientes inversos à variável dependente, ao passo que nas demais empresas esta relação é positiva.

As relações de *moneyness*, tempo até exercício e seus desdobramentos quadráticos apresentam significância estatística a 0,1% para praticamente todas as empresas. As exceções dão-se para $(S/K)^2$ de Lojas Americanas - a 10% -, Via Varejo e Bova11 a 5%. Apenas para Marfrig (a 5%) cabe exceção à regra para o tempo até o exercício, tal qual para sua função quadrática (a 10%). A hipótese de ajuste quadrático para estas variáveis (3) encontra sustentação em grande parte dos resultados observados. Nove empresas apresentam coeficientes significativos para as taxas de juros (todas a 0,1%), sendo que a relação é negativa para Via Varejo, Ambev e Bova11 e positiva para as demais; excetuam-se Cogna e Embraer deste escopo. Todas as empresas apresentam robustez (homocedasticidade) dos seus resíduos, a 0,1% - salvo por Rumo, a 1%.

4.5 Relações entre as Diferentes Regressões para Cada Empresa

De forma geral, pode-se interpretar que há consistência entre as diferentes versões das variáveis dependentes e de liquidez utilizadas para análise. Em favor dos resultados apresentados está a quantidade de observações objeto de análise e as diferentes características entre as empresas destacadas. Pode-se corroborar o entendimento de que o efeito sorriso é significativo para as empresas analisadas, nas opções de compra durante o período de março a dezembro de 2019, assim como a influência da passagem do tempo no aumento destas diferenças. Suas funções quadráticas explicam grande parte do comportamento das empresas, porém algumas delas - especialmente as que apresentaram menor número de negociações no período - têm menor margem de confiança ou não apresentam coeficientes estatisticamente significativos.

Pode-se interpretar neste sentido o fato de, concomitantemente ao menor número de negociações, diminuem-se os negócios efetuados com opções mais fora do dinheiro (*calls* de baixos deltas), ocasionando a omissão de observações passíveis de teste relacionado ao decaí-

Tabela 5: Modelo de Regressão Utilizando Diferenças Ponderadas

<i>Variável Dependente:</i> Dif / VI												
<i>Empresa</i>	VALE3	VVAR3	ABEV3	BOVA11	LAME4	COGN3	JBSS3	BRFS3	RAIL3	OIBR3	EMBR3	MRFG3
ln p.q(D)	0.001***	-0.006***	0.0005**	-0.0003	0.003***	-0.002*	0.002	0.0003	0.003**	0.012***	-0.014***	-0.0001
S/K	1.007***	1.528***	1.638***	1.474***	1.071***	1.436***	2.373***	1.440***	2.993***	2.060***	13.688***	2.441***
(S/K) ²	-8.240***	-4.493*	-6.870***	23.920*	-0.986	-4.680***	-14.890***	-10.191***	-31.660***	-7.397***	-151.988***	-13.759***
T-t	-1.055***	-2.160***	-0.808***	-0.590***	-1.427***	-1.821***	-1.414***	-0.627***	-1.115***	-3.276***	-3.320***	-4.879*
(T-t) ²	10.047***	18.459***	5.346***	3.357***	9.898***	9.815***	12.000***	3.950***	5.549***	19.380***	22.566***	28.199
i	0.447***	-1.569***	-0.793***	-0.701***	2.528***	-0.485	1.744***	0.391***	1.520***	-	0.548	3.699***
α	-0.003*	0.202***	0.061***	0.065***	-0.108***	0.110***	-0.085***	0.008***	-0.055***	0.043*	-0.021	-0.049
Observações	223,531	16,094	11,073	7,960	4,431	2,994	2,845	2,727	1,700	1,653	622	451
R ²	0.226	0.225	0.436	0.480	0.280	0.363	0.311	0.377	0.272	0.378	0.385	0.602
R ² ajustado	0.226	0.225	0.435	0.479	0.279	0.362	0.310	0.375	0.270	0.376	0.379	0.596
DP dos Resíduos	0.028	0.083	0.035	0.047	0.050	0.046	0.055	0.034	0.060	0.096	0.061	0.055
Estatística F	10,883.060***	780.208***	1,424.413***	1,221.665***	287.234***	283.921***	213.896***	274.051***	105.560***	200.304***	64.154***	111.723***
Breusch-Pagan	12294***	1078.6***	709.59***	525.92***	127.23***	201.45***	211.24***	100.17***	33.282**	134.59***	62.064***	57.498***
	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 223524)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 16087)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 11066)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 7953)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 4424)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 2987)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 2838)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 6; 2720)	p = 9.25e ⁻⁶ (gl = 6; 1693)	p < 2.2e ⁻¹⁶ (gl = 5; 1647)	p = 1.71e ⁻¹¹ (gl = 6; 615)	p = 1.45e ⁻¹⁰ (gl = 6; 444)

Nota: · p<0.1; *p<0.05; **p<0.01; ***p<0.001.

Fonte: Elaboração própria.

mento linear destas diferenças. Entretanto, este fato ocorre apenas para 1 das 12 empresas em cada variável quadrática.

Esperava-se encontrar uma relação negativa entre as diferenças entre volatilidades implícitas e as *proxies* para o volume de negociações no período, o que não ocorreu para grande parte das empresas observadas. Ademais, enfocando-se apenas nos coeficientes com algum nível de significância, não se observa relação congruente entre diferentes níveis de negociação, assim como a magnitude destes coeficientes é pouco representativa às regressões.

Na prática, em corroborando o entendimento de que, aos níveis negociados, as diferenças de volatilidades implícitas não sofrem impacto da liquidez, tem-se firmas de diferentes níveis de negócios em opções com similares pressupostos (sob a perspectiva do agente de mercado) no que diz respeito a estratégias e precificação em opções, o que as coloca, neste quesito, em condição mais equânime ao se considerar operar tais derivativos. Isso pode ajudar a fomentar o mercado, visto que as distorções em preços oriundas de volatilidade implícita apresentam baixa relação com as quantidades negociadas.

Ocorre uma dicotomia entre fatores que possam interferir nestas diferenças: a passagem do tempo as aumenta, momento em que também se aumenta o número de negociações de uma determinada opção, afetando as variáveis que visaram captar as medidas de liquidez. O estudo sob condições ideais de mercado de Chance et al. (2017) reafirmou tal viés e pode elucidar tais achados, indo em direção de que outros fatores (relacionados ao risco) possam promover tais desvios. Ademais, não se pode eliminar de forma categórica uma possível impropriedade na especificação da variável relacionada à liquidez, o que oportunizou diferentes interpretações para os coeficientes observados no presente estudo e em publicações pretéritas, tanto em estudos brasileiros quanto em internacionais.

Tal qual pra a liquidez, a influência das taxas de juros pode ter captado outros possíveis fatores (mudança de cenário macroeconômico, mudanças de percepção de risco geral, bem como projeções de alterações conjunturais) sobre os efeitos de alterações de taxas de juros livres de risco, que, no Brasil e para o período observado, foram no sentido de reajustes a fim de diminuir o prêmio para ativos livres de risco da economia em geral.

Observou-se paulatinas reduções de taxas de juros durante o período, o que pode contribuir para que o mercado de derivativos apresente substanciais mudanças em apetite ao risco, novos entrantes e diferentes propósitos relacionados à negociação em opções de compra. Estes fatores podem explicar relações positivas e negativas nas diferenças entre volatilidades observadas nas empresas objetos de análise durante o período, e também fomentar a pesquisa acadêmica na direção dos motivadores qualitativos das negociações efetuadas em opções (seja por investidores institucionais ou pessoas físicas, visando securitização ou maior apetite ao

risco).

Para as 4 empresas com a maior quantidade de negociações no período, concentram-se 94% de todos os dados analisados. Ao longo das quatro regressões observadas, seu comportamento permaneceu consistente entre as diferentes variáveis dependentes e para liquidez. Já para as empresas com menores números de negociações no mesmo intervalo, houve resultados marginalmente diferentes entre as especificações dos modelos utilizados.

As variáveis utilizadas para mensurar a relação da liquidez com a variável dependente não se mostraram significativas nas 4 regressões para Marfrig; entretanto, corrobora-se o efeito sorriso e seu ajuste quadrático a 0,1% a todos os modelos avaliados. Em que pese as diferenças simples não apontam significância do tempo até exercício para a empresa, as duas regressões que utilizaram diferenças ponderadas apontam uma relação negativa da passagem do tempo. Sua variável quadrática não é estatisticamente significativa a 5%, sendo as taxas de juros livres de risco congruentes entre si e significativas.

Diferentemente de Marfrig, Embraer apresenta relação negativa e estatisticamente significativa para o logaritmo de preços e quantidades e não para a relação entre volume em opções e ações: seja para diferenças simples, seja para ponderadas, como variável dependente. As demais variáveis seguem o padrão esperado, a despeito da não significância da taxa de juros.

Pode-se extrapolar as conclusões de Embraer para a empresa Oi, em que o comportamento de *moneyness*, tempo até exercício e suas quadráticas mantêm mesma relação e nível de significância. Para as variáveis de liquidez, assemelham-se em apresentar mesma significância - e exclusivamente em - logaritmo de preços e quantidades, ao passo que diferenciam-se em sua relação com a variável dependente (em Oi esta é positiva). Não apresenta coeficiente calculado para a variável taxa de juros pois a coleta da amostra de opções não retornou períodos em que houve alterações desta, mantendo-se 6,5% ao ano.

A variável de liquidez ponderada também não obteve significância estatística para Rumo, que apresentou relevância em todas as demais variáveis, incluindo as taxas de juros livres de risco. A relação das variáveis de liquidez com as diferenças entre volatilidades (simples e ponderada) são positivas, assemelhando-se à Oi, em que apenas seus logaritmos são significativos.

Brasil Foods não apresenta robustez para a variável de liquidez em nenhuma das regressões efetuadas, entretanto os demais resultados têm significância a 0,1% e são congruentes com as relações esperadas, estendendo-se à variável taxa de juros. Da mesma forma, excetuando-se as *proxies* de liquidez, JBS apresenta relações semelhantes para os quatro modelos tal qual Brasil Foods. Não é significativo para a relação do logaritmo de preços e quantidades quando a variável dependente são as diferenças ponderadas de volatilidades implícitas. Nas demais

relações, há significância a pelo menos 5%.

Em suas quatro versões do modelo, Cogna não obteve significância para a variável taxas de juros, entretanto, a 5%, a relação das variáveis de liquidez é negativa à variável dependente. As demais variáveis seguem o comportamento esperado e observado nas empresas da amostra, a 0,1% de significância estatística.

Única empresa que não obteve significância estatística a 5% da variável quadrática de *moneyness*, Lojas Americanas apresentam significância estatística em todos os demais coeficientes, relação positiva entre volume e diferenças de volatilidades implícitas, assim como das taxas de juros livres de risco. Tanto as empresas mais líquidas como as com menor negociação no período têm, apesar de suas diferenças, consistência entre as diferentes regressões, o que envolve concluir que os modelos apresentados não apresentam discrepâncias entre si.

4.6 Resumo das Variáveis de Interesse

Por fim, observa-se de forma agregada o comportamento das variáveis de interesse constantes nas hipóteses desenvolvidas. Para as generalizações, utiliza-se como intervalo de confiança aceitável o nível de 5%.

4.6.1 *Moneyness*

Todas as variáveis mostraram-se significativas, nos diferentes modelos observados, desde as empresas com maiores negociações até àquelas menos líquidas. Portanto, aceita-se a hipótese 1, de que o 'efeito sorriso' impacta positivamente nas diferenças de volatilidades implícitas para opções de compra no Brasil, para um mesmo ativo subjacente. Espera-se que, ao negociar opções cujos *strikes* sejam, em módulo, superiores à cotação do ativo no instante λ , compradores pagarão prêmios em excesso e lançadores de opções receberão valores superiores aos que se esperaria obter através do modelo de Black e Scholes. Em que pese a recorrência de aparente distorção do modelo, estudos viabilizados ao longo das últimas décadas buscam métodos que aprimorem as estimativas desta superfície, tendo os agentes de mercado já internalizado tal viés. A busca por novas variáveis que expliquem estas diferenças, entretanto, é menos difundida na literatura.

4.6.2 Proxies para Liquidez

As relações observadas nas diferentes regressões não permitem concluir de forma generalizável que a liquidez influencia negativamente na magnitude das diferenças entre volatilidades implícitas (hipótese 2) para opções de compra no Brasil. Em que pese o estudo ter aplicado de forma original este entendimento em mercados de derivativos, baseando o desenho da hipótese a partir de pesquisas aplicadas a mercados de ativos, abria-se a possibilidade de tal variável não captar - ou não revelar - tal relação. Estudos sobre liquidez nos mercados de capitais ora publicados não são uníssomos em concluir tal relação à formação e dinâmica de alterações de preços, o que não é diferente no presente trabalho. A lógica dos formadores de mercado pode ser uma das possíveis explicações que contribuam à não significância destas variáveis. Alternativamente, a liquidez de um derivativo (ou sua ausência) pode ter efeito similar para todo o conjunto de opções de compra de uma determinada empresa (um possível impacto do volume negociado sobre preços dos derivativos poderia ser igualmente distribuído entre opções dentro e fora do dinheiro, assim como a opções no dinheiro no caso de um ativo cujas opções apresentam poucos negócios).

4.6.3 Ajustes Quadráticos

Em ambas as variáveis, o ajuste quadrático apresenta-se adequado para 11 das 12 empresas analisadas. Ao passo que a variável *moneyness* ao quadrado não foi significativa a 5% para Lojas Americanas, Marfrig não apresentou tal significância para $(T - t)^2$. Conclui-se que, em um grau de generalização aceitável, que grande parte das observações (98 e 99% do total, respectivamente), o ajuste quadrático explica melhor a dinâmica entre estas variáveis e as diferenças entre volatilidades implícitas. Haverá pontos em que a variável tempo até o exercício promoverá alterações entre as diferenças de volatilidades implícitas mais aceleradamente do que o ajuste linear espera; replica-se este entendimento para o distanciamento entre o preço de exercício da opção negociada e a cotação do ativo no instante λ . Com isso, pode-se dizer, a despeito das duas empresas acima referidas, que o ajuste quadrático das variáveis tempo e *moneyness* é relevante para explicar a dinâmica entre diferenças de volatilidades implícitas de um mesmo ativo subjacente (hipótese 3).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O advento do modelo de precificação de opções de Black e Scholes promoveu mudanças profundas no mercado de derivativos, desenvolvendo-o, sendo um método aplicado até os dias atuais. Entretanto, no mesmo período em que fora publicado, diversos artigos identificaram recorrentes desvios do modelo em relação ao observado nas negociações efetuadas no mercado americano. Divergências entre volatilidades implícitas tornaram-se fato notório, sendo cunhado o termo 'efeito sorriso' das volatilidades implícitas.

Mesmo assim, para mercados em que há especificidades relacionadas à dinâmica de negociações de opções, não se observam estudos visando aprofundar a compreensão de possíveis motivadores destas diferenças. Relevante é o papel da liquidez para determinação de preços de mercado, seja para ativos bem como para derivativos. Observa-se, então, os possíveis determinantes destas diferenças para as opções de compra de doze empresas no Brasil no período de 2019.

Em que pese suas diferenças em número de observações, as *proxies* utilizadas para volume de negociações apresentaram pouca relevância no comportamento das volatilidades implícitas dadas pelo modelo; houve poucas empresas com alguma significância estatística, e, mesmo assim, seus coeficientes não são unanimemente direcionados, e de irrisória magnitude (na terceira e quarta casas decimais).

Alternativamente, para o nível de 5% de significância, aceita-se a hipótese de que o 'efeito sorriso' é positivo e significativo na dimensão destas diferenças entre volatilidades, tal qual seu ajuste quadrático (salvo por uma empresa estudada). A não ser pela empresa com o menor número de observações, assim também o é para a passagem do tempo e sua variável quadrática.

Interessante observar que, em níveis como as amostras de dados se apresentam, há baixo impacto da liquidez em favor das distorções entre volatilidades observadas. O fato de se utilizar negociações efetuadas (em detrimento do *bid-ask spread*) pode ocultar potenciais distorções e/ou inibição de novos negócios. Também, a lógica dos formadores de mercado de opções pode dirimir tal necessidade de liquidez esperada.

A recomendação para estudos posteriores pode encontrar bons resultados no aprofundamento qualitativo dos motivadores das negociações efetuadas no mercado de derivativos brasileiro. A dinâmica de formadores de mercado pode intuir que a necessidade de liquidez de negociações não implica em níveis tão significativos para que as possíveis distorções de volatilidades implícitas se acentuem. O potencial de negócios inibido por um possível *gap* entre *bid-ask spread* pode ser uma desambiguação futura do presente estudo. A lógica de remuneração de um CEO, bem como a lógica de proteção de carteira podem ser pontos exploráveis

em futuros estudos no que diz respeito aos motivadores que levam agentes a negociar opções de baixa liquidez no mercado de derivativos.

O estudo pode ser apropriadamente revisitado com dados contemporâneos, visando identificar potenciais alterações qualitativas nos tipos de investidores e alterações em volumes negociados, que notoriamente - e aliada às reduções de custos de transação, advindas do aumento em competitividade no setor - vêm crescendo em número de pessoas físicas em mercados de ativos, repercutindo também em maior acesso ao mercado de opções. Por outro lado, estudos posteriores também podem aprofundar-se em outros possíveis estimadores destas diferenças, levando em consideração que o valor extrínseco de uma opção já deveria internalizar seu prêmio pelo risco.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, C. **Pricing, hedging and trading financial instruments**. John Wiley & Sons, 2008.
- ANTHONY, J. H. The interrelation of stock and options market trading-volume data. **The Journal of Finance**, v. 43, n. 4, p. 949–964, 1988.
- BÄRHOLM, P. Implied volatility smile dynamics in the presence of jumps. , 2017.
- BIKTIMIROV, E. N.; WANG, C. Model-Based versus model-free implied volatility: evidence from north american, european, and asian index option markets. **the Journal of Derivatives**, v. 24, n. 3, p. 42–68, 2017.
- BLACK, F. Fact and fantasy in the use of options. **Financial Analysts Journal**, v. 31, n. 4, p. 36–41, 1975.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of political economy**, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973.
- CHAN, K.; CHUNG, Y. P.; FONG, W.-M. The informational role of stock and option volume. **The Review of Financial Studies**, v. 15, n. 4, p. 1049–1075, 2002.
- CHANCE, D. M.; HANSON, T. A.; LI, W.; MUTHUSWAMY, J. A bias in the volatility smile. **Review of Derivatives Research**, v. 20, n. 1, p. 47–90, 2017.
- CHIRAS, D. P.; MANASTER, S. The information content of option prices and a test of market efficiency. **Journal of Financial Economics**, v. 6, n. 2-3, p. 213–234, 1978.
- COHEN, G. **The bible of options strategies: the definitive guide for practical trading strategies**. Pearson Education, 2005.
- CONT, R.; DA FONSECA, J. Dynamics of implied volatility surfaces. **Quantitative finance**, v. 2, p. 45–60, 2002.
- CORREIA, L. F.; AMARAL, H. F.; BRESSAN, A. A. O efeito da liquidez sobre a rentabilidade de mercado das ações negociadas no mercado acionário brasileiro. **Revista Base (Administração e Contabilidade) da UNISINOS**, v. 5, n. 2, p. 109–119, 2008.
- COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: a simplified approach. **Journal of financial Economics**, v. 7, n. 3, p. 229–263, 1979.
- DUAN, J.-C. The GARCH option pricing model. **Mathematical finance**, v. 5, n. 1, p. 13–32, 1995.
- DUMAS, B.; FLEMING, J.; WHALEY, R. E. Implied volatility functions: empirical tests. **The Journal of Finance**, v. 53, n. 6, p. 2059–2106, 1998.

- FRANCO, M. S. **O comportamento do valor extrínseco das opções de compra de ações no mercado de capitais brasileiro**. 2014. Tese Universidade de São Paulo, 2014.
- GENTIL JUNIOR, G. **Sorriso da Volatilidade nas Opções de compra da Telemar PN usando dados intradiários**. 2007. Tese Dissertação (Mestrado de Administração)–Instituto COOPEAD de Administração . . . , 2007.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. Editora Atlas SA, 2008.
- GUJARATI, D. **Econometrics by example**. Macmillan, 2012.
- GULTEKIN, N. B.; ROGALSKI, R. J.; TINIC, S. M. Option pricing model estimates: some empirical results. **Financial management**, p. 58–69, 1982.
- HULL, J. C. **Options futures and other derivatives**. Pearson Education India, 2003.
- HULL, J.; WHITE, A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. **The journal of finance**, v. 42, n. 2, p. 281–300, 1987.
- KAHNEMAN, D. Prospect theory: an analysis of decisions under risk. **Econometrica**, v. 47, p. 278, 1979.
- LANARI, C. S. O efeito "sorriso" da volatilidade implícita do modelo de Black e Scholes: estudo empírico sobre as opções telebrás pn no ano de 1998. , 2000.
- MACBETH, J. D.; MERVILLE, L. J. An empirical examination of the Black-Scholes call option pricing model. **The journal of finance**, v. 34, n. 5, p. 1173–1186, 1979.
- MERTON, R. C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. **Journal of financial economics**, v. 3, n. 1-2, p. 125–144, 1976.
- MERTON, R. C. et al. Theory of rational option pricing. **Theory of Valuation**, p. 229–288, 1973.
- PERLIN, M.; RAMOS, H. GetHFData: ar package for downloading and aggregating high frequency trading data from bovespa. **Available at SSRN 2824058**, 2016.
- REBONATO, R. What Does Today’s Smile Imply About Future Volatilities? **The Journal of Derivatives**, v. 27, n. 3, p. 26–44, 2020.
- SAATCIOGLU, K.; STARKS, L. T. The stock price–volume relationship in emerging stock markets: the case of latin america. **International Journal of forecasting**, v. 14, n. 2, p. 215–225, 1998.
- STEPHAN, J. A.; WHALEY, R. E. Intraday price change and trading volume relations in the stock and stock option markets. **The Journal of Finance**, v. 45, n. 1, p. 191–220, 1990.
- VIANA, P. **O Efeito ‘Sorriso’ da Volatilidade Implícita de Opções Financeiras: estudo empírico aplicado a opções sobre ações da liffe**. 1998. Tese Dissertação de Mestrado em Ciências Empresariais com Especialização em . . . , 1998.

VIEIRA, K. M.; MILACH, F. T. Liquidez/iliquidez no mercado brasileiro: comportamento no período 1995-2005 e suas relações com o retorno. **Revista Base (Administração e Contabilidade) da UNISINOS**, v. 5, n. 1, p. 5–16, 2008.

VIJH, A. M. Liquidity of the CBOE equity options. **The Journal of Finance**, v. 45, n. 4, p. 1157–1179, 1990.

APÊNDICE A MATRIZ DE CORRELAÇÃO E ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS

Nesta seção estão consolidadas as tabelas correspondentes às estatísticas descritivas das doze empresas analisadas, bem como a matriz de correlação de Pearson para as variáveis independentes utilizadas nas regressões. As doze empresas tiveram suas observações unificadas, formando uma tabela contendo esta estatística -, ao passo que para as estatísticas descritivas, ordenam-se suas tabelas de forma decrescente do número de observações coletadas.

Destaca-se a baixa correlação entre variáveis independentes, excetuando-se as desambiguações quadráticas de *moneyness* e tempo até o exercício com suas variáveis lineares. Nas estatísticas descritivas, constam (em ordem): o número de observações, valores mínimos, máximos, medianos e médios; o erro padrão da média; o intervalo de confiança a 99% para aquela variável; sua variância, desvio padrão e coeficiente de variação.

Tabela 6: Matriz de Correlação de Pearson entre as Variáveis Independentes

	S/K	(S/K) ²	p.q(A)	p.q(D)	T - t	(T - t) ²	i
S/K	1.000	0.969	-0.079	-0.242	0.297	0.272	0.083
(S/K) ²	0.969	1.000	-0.074	-0.235	0.291	0.267	0.084
p.q(A)	-0.079	-0.074	1.000	0.147	-0.063	-0.067	0.078
p.q(D)	-0.242	-0.235	0.147	1.000	0.093	0.078	0.106
T - t	0.297	0.291	-0.063	0.093	1.000	0.979	0.017
(T - t) ²	0.272	0.267	-0.067	0.078	0.979	1.000	0.016
i	0.083	0.084	0.078	0.106	0.017	0.016	1.000

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 7: Estatística Descritiva - VALE3

	Dif	Dif / VI	ln p.q(D)	p.q(D)/p.q(A)	S/K	(S/K) ²	T-t	(T-t) ²	i
n	223531	223531	223531	223531	223531	223531	223531	223531	223531
Mín	0	0	1099	0	0	0	0.008	0	0.045
Max	0.027	0.091	9658	1225	0.099	0.004	0.105	0.008	0.065
Mediana	0.008	0.028	8438	0.029	0.034	0.001	0.047	0.002	0.06
Média	0.011	0.037	8193	0.081	0.04	0.002	0.049	0.003	0.06
EP da Média	0	0	0.003	0	0	0	0	0	0
IC p=0,99	0	0	0.007	0.001	0	0	0	0	0
Variância	0	0.001	1771	0.023	0.001	0	0.001	0	0
Desvio Padrão	0.009	0.031	1331	0.15	0.03	0.002	0.027	0.003	0.006
Coef Variação	0.856	0.849	0.162	1853	0.746	0.95	0.56	0.876	0.099

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 8: Estatística Descritiva - VVAR3

	Dif	Dif / VI	ln p.q(D)	p.q(D)/p.q(A)	S/K	(S/K) ²	T-t	(T-t) ²	i
n	16094	16094	16094	16094	16094	16094	16094	16094	16094
Min	0	0	1099	0	0	0	0.008	0	0.045
Max	0.129	0.26	8378	3236	0.121	0.006	0.125	0.01	0.065
Mediana	0.032	0.066	7157	0.034	0.041	0.002	0.052	0.003	0.055
Média	0.046	0.095	6965	0.131	0.052	0.003	0.057	0.004	0.056
EP da Média	0	0.001	0.01	0.002	0	0	0	0	0
IC p=0,99	0.001	0.002	0.026	0.006	0.001	0	0.001	0	0
Variância	0.002	0.009	1604	0.074	0.002	0	0.001	0	0
Desvio Padrão	0.046	0.094	1267	0.273	0.04	0.003	0.032	0.003	0.007
Coef Variação	0.989	0.991	0.182	2075	0.772	0.948	0.56	0.853	0.121

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 9: Estatística Descritiva - ABEV3

	Dif	Dif / VI	ln p.q(D)	p.q(D)/p.q(A)	S/K	(S/K) ²	T-t	(T-t) ²	i
n	11073	11073	11073	11073	11073	11073	11073	11073	11073
Min	0	0	1099	0	0	0	0.008	0	0.045
Max	0.028	0.121	8267	0.786	0.098	0.005	0.131	0.013	0.065
Mediana	0.007	0.03	7023	0.008	0.037	0.001	0.065	0.004	0.06
Média	0.011	0.046	6834	0.04	0.04	0.002	0.06	0.004	0.06
EP da Média	0	0	0.013	0.001	0	0	0	0	0
IC p=0,99	0	0.001	0.032	0.002	0.001	0	0.001	0	0
Variância	0	0.002	1748	0.009	0.001	0	0.001	0	0
Desvio Padrão	0.011	0.046	1322	0.094	0.027	0.002	0.031	0.004	0.006
Coef Variação	1009	1008	0.193	2316	0.682	0.931	0.511	0.836	0.097

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 10: Estatística Descritiva - BOVA11

	Dif	Dif / VI	ln p.q(D)	p.q(D)/p.q(A)	S/K	(S/K) ²	T-t	(T-t) ²	i
n	7960	7960	7960	7960	7960	7960	7960	7960	7960
Min	0	0	0.405	0	0	0	0.008	0	0.045
Max	0.032	0.164	8928	2737	0.066	0.002	0.188	0.019	0.065
Mediana	0.008	0.041	7.65	0.041	0.02	0	0.074	0.005	0.06
Média	0.012	0.057	7343	0.149	0.027	0.001	0.082	0.008	0.059
EP da Média	0	0.001	0.018	0.004	0	0	0.001	0	0
IC p=0,99	0	0.002	0.046	0.01	0.001	0	0.002	0	0
Variância	0	0.003	2514	0.118	0.001	0	0.003	0	0
Desvio Padrão	0.012	0.059	1586	0.344	0.023	0.001	0.055	0.007	0.006
Coef Variação	1032	1029	0.216	2.31	0.843	0.961	0.677	0.924	0.099

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 11: Estatística Descritiva - LAME4

	Dif	Dif / VI	ln p.q(D)	p.q(D)/p.q(A)	S/K	(S/K) ²	T-t	(T-t) ²	i
n	4431	4431	4431	4431	4431	4431	4431	4431	4431
Min	0	0	1099	0	0.004	0	0.014	0	0.045
Max	0.064	0.179	7937	0.619	0.127	0.012	0.096	0.008	0.065
Mediana	0.022	0.061	6835	0.033	0.066	0.004	0.055	0.003	0.055
Média	0.026	0.072	6708	0.055	0.064	0.005	0.057	0.004	0.054
EP da Média	0	0.001	0.016	0.001	0	0	0	0	0
IC p=0,99	0.001	0.002	0.041	0.003	0.001	0	0.001	0	0
Variância	0	0.003	1.13	0.006	0.001	0	0.001	0	0
Desvio Padrão	0.02	0.055	1063	0.075	0.032	0.004	0.024	0.002	0.005
Coef Variação	0.781	0.772	0.158	1362	0.502	0.764	0.411	0.674	0.098

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 12: Estatística Descritiva - COGN3

	Dif	Dif / VI	ln p.q(D)	p.q(D)/p.q(A)	S/K	(S/K) ²	T-t	(T-t) ²	i
n	2994	2994	2994	2994	2994	2994	2994	2994	2994
Min	0	0	1609	0	0	0	0.036	0.001	0.045
Max	0.064	0.173	8.49	1708	0.15	0.012	0.117	0.013	0.055
Mediana	0.019	0.051	7293	0.036	0.059	0.004	0.077	0.006	0.045
Média	0.024	0.065	7153	0.117	0.063	0.005	0.073	0.006	0.048
EP da Média	0	0.001	0.022	0.004	0.001	0	0	0	0
IC p=0,99	0.001	0.003	0.056	0.011	0.002	0	0.001	0	0
Variância	0	0.003	1409	0.055	0.002	0	0.001	0	0
Desvio Padrão	0.021	0.058	1187	0.235	0.04	0.004	0.024	0.003	0.003
Coef Variação	0.88	0.884	0.166	2014	0.626	0.904	0.325	0.56	0.071

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 13: Estatística Descritiva - JBSS3

	Dif	Dif / VI	ln p.q(D)	p.q(D)/p.q(A)	S/K	(S/K) ²	T-t	(T-t) ²	i
n	2845	2845	2845	2845	2845	2845	2845	2845	2845
Min	0	0	1946	0	0	0	0.008	0	0.045
Max	0.08	0.185	8541	0.885	0.143	0.011	0.111	0.007	0.065
Mediana	0.021	0.048	7358	0.023	0.055	0.003	0.046	0.002	0.06
Média	0.03	0.069	7172	0.058	0.058	0.004	0.05	0.003	0.058
EP da Média	0.001	0.001	0.023	0.002	0.001	0	0.001	0	0
IC p=0,99	0.001	0.003	0.059	0.005	0.002	0	0.001	0	0
Variância	0.001	0.004	1511	0.01	0.001	0	0.001	0	0
Desvio Padrão	0.029	0.066	1229	0.1	0.037	0.004	0.03	0.003	0.007
Coef Variação	0.963	0.959	0.171	1715	0.642	0.919	0.592	0.892	0.124

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 14: Estatística Descritiva - BRFS3

	Dif	Dif / VI	ln p.q(D)	p.q(D)/p.q(A)	S/K	(S/K) ²	T-t	(T-t) ²	i
n	2727	2727	2727	2727	2727	2727	2727	2727	2727
Min	0	0	1099	0	0	0	0.008	0	0.045
Max	0.038	0.112	9.75	2802	0.105	0.005	0.163	0.017	0.065
Mediana	0.01	0.028	8517	0.048	0.037	0.001	0.074	0.005	0.065
Média	0.014	0.042	8.23	0.144	0.045	0.002	0.074	0.007	0.06
EP da Média	0	0.001	0.028	0.005	0.001	0	0.001	0	0
IC p=0,99	0.001	0.002	0.072	0.013	0.002	0	0.002	0	0
Variância	0	0.002	2123	0.07	0.001	0	0.002	0	0
Desvio Padrão	0.015	0.043	1457	0.265	0.033	0.002	0.04	0.005	0.006
Coef Variação	1009	1011	0.177	1842	0.737	0.935	0.546	0.834	0.104

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 15: Estatística Descritiva - RAIL3

	Dif	Dif / VI	ln p.q(D)	p.q(D)/p.q(A)	S/K	(S/K) ²	T-t	(T-t) ²	i
n	1700	1700	1700	1700	1700	1700	1700	1700	1700
Min	0	0	2708	0	0	0	0.008	0	0.045
Max	0.052	0.194	9457	2344	0.106	0.006	0.177	0.017	0.065
Mediana	0.014	0.051	8.18	0.049	0.039	0.001	0.071	0.005	0.065
Média	0.02	0.075	7909	0.132	0.042	0.002	0.075	0.007	0.06
EP da Média	0	0.002	0.035	0.006	0.001	0	0.001	0	0
IC p=0,99	0.001	0.004	0.09	0.016	0.002	0	0.003	0	0
Variância	0	0.005	2071	0.069	0.001	0	0.002	0	0
Desvio Padrão	0.018	0.07	1439	0.262	0.03	0.002	0.045	0.006	0.006
Coef Variação	0.929	0.931	0.182	1994	0.713	0.952	0.606	0.884	0.101

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 16: Estatística Descritiva - OIBR3

	Dif	Dif / VI	ln p.q(D)	p.q(D)/p.q(A)	S/K	(S/K) ²	T-t	(T-t) ²	i
n	1653	1653	1653	1653	1653	1653	1653	1653	1653
Min	0	0	1792	0	0	0	0.008	0	0.065
Max	0.244	0.339	7599	4359	0.185	0.016	0.126	0.013	0.065
Mediana	0.061	0.086	6477	0.033	0.067	0.004	0.071	0.005	0.065
Média	0.088	0.125	6332	0.268	0.081	0.007	0.061	0.005	0.065
EP da Média	0.002	0.003	0.027	0.015	0.001	0	0.001	0	0
IC p=0,99	0.005	0.008	0.07	0.039	0.004	0	0.002	0	0
Variância	0.007	0.015	1217	0.382	0.003	0	0.001	0	0
Desvio Padrão	0.084	0.122	1103	0.618	0.058	0.006	0.03	0.004	0
Coef Variação	0.963	0.971	0.174	2306	0.716	0.928	0.492	0.781	0

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 17: Estatística Descritiva - EMBR3

	Dif	Dif / VI	ln p.q(D)	p.q(D)/p.q(A)	S/K	(S/K) ²	T-t	(T-t) ²	i
n	622	622	622	622	622	622	622	622	622
Min	0	0	1386	0	0.017	0	0.01	0	0.045
Max	0.056	0.214	8695	1123	0.078	0.005	0.138	0.016	0.065
Mediana	0.014	0.054	7492	0.05	0.048	0.002	0.074	0.005	0.065
Média	0.022	0.084	7261	0.076	0.046	0.002	0.079	0.007	0.064
EP da Média	0.001	0.003	0.052	0.005	0.001	0	0.001	0	0
IC p=0,99	0.002	0.008	0.135	0.013	0.002	0	0.003	0	0
Variância	0	0.006	1704	0.015	0	0	0.001	0	0
Desvio Padrão	0.02	0.078	1306	0.124	0.019	0.002	0.033	0.005	0.004
Coef Variação	0.929	0.927	0.18	1638	0.405	0.649	0.421	0.666	0.058

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 18: Estatística Descritiva - MRFG3

	Dif	Dif / VI	ln p.q(D)	p.q(D)/p.q(A)	S/K	(S/K) ²	T-t	(T-t) ²	i
n	451	451	451	451	451	451	451	451	451
Min	0	0	1099	0	0	0	0.036	0.001	0.045
Max	0.111	0.242	8988	2799	0.168	0.013	0.101	0.009	0.065
Mediana	0.028	0.061	7659	0.073	0.057	0.003	0.068	0.005	0.045
Média	0.039	0.088	7165	0.222	0.064	0.005	0.065	0.005	0.05
EP da Média	0.002	0.004	0.088	0.02	0.002	0	0.001	0	0
IC p=0,99	0.005	0.011	0.227	0.053	0.006	0.001	0.002	0	0.001
Variância	0.002	0.008	3475	0.189	0.002	0	0	0	0
Desvio Padrão	0.039	0.087	1864	0.435	0.048	0.005	0.019	0.002	0.008
Coef Variação	1005	0.992	0.26	1956	0.75	0.968	0.291	0.505	0.153

Fonte: Elaboração própria.