

UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS - UNISINOS
UNIDADE ACADÊMICA DE GRADUAÇÃO
CURSO DE FÍSICA

GABRIEL GUARNIERI

VIESES COMPORTAMENTAIS E A DINÂMICA DO MERCADO:
Imitadores, Contrários e Grupo de Influência

São Leopoldo
2021

GABRIEL GUARNIERI

**VIESES COMPORTAMENTAIS E A DINÂMICA DO MERCADO:
Imitadores, Contrários e Grupo de Influência**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física, pelo Curso de Licenciatura em Física da Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS).

Orientador: Prof. Alessandro Marian Carvalho

São Leopoldo

2021

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Celso e Marlete, pelo apoio incondicional e por estarem sempre ao meu lado em todos os momentos da minha vida. Se hoje pude chegar até aqui, é graças a eles.

Ao meu orientador, Alexsandro Marian Carvalho, por todas conversas, conselhos e por toda ajuda dada durante a realização deste trabalho.

À Laura, pelo apoio e incentivo em momentos de insegurança.

A todos os professores que já passaram pela minha vida, que, de uma forma ou outra, contribuíram para a minha formação.

À Unisinos, por todas as oportunidades e experiências vivenciadas neste período de graduação.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Formigas explorando fontes de alimento distintas	15
Figura 2 – Função de distribuição	18
Figura 3 – Modelo de Kirman: primeiro cenário.....	25
Figura 4 – Modelo de Kirman: segundo cenário.....	26
Figura 5 – Modelo de Kirman: terceiro cenário.....	28
Figura 6 – Cenário 1 com grupos de influência ($N_g = 2$)	30
Figura 7 – Cenário 2 com grupos de influência ($N_g = 2$)	31
Figura 8 – Cenário 3 com grupos de influência ($N_g = 2$)	31
Figura 9 – Desvios médios do primeiro cenário	33
Figura 10 – Desvios médios do segundo cenário.....	33
Figura 11 – Desvios médios do terceiro cenário	34
Figura 12 – Cenário 1 com agentes contrários.....	35
Figura 13 – Cenário 2 com agentes contrários.....	36
Figura 14 – Cenário 3 com agentes contrários.....	36

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Variáveis e parâmetros do sistema	21
Tabela 2 – Desvios médios do sistema em relação à solução analítica.....	32

LISTA DE SIGLAS

ABM Agent-based model

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	8
1.1 Tema	9
1.2 Delimitação do tema	9
1.3 Problema	9
1.4 Objetivos	9
1.4.1 Objetivo geral	9
1.4.2 Objetivos específicos	9
1.5 Justificativa	10
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	11
2.1 Finança Comportamental	11
2.2 Bolhas Financeiras	12
2.3 Formigas e Recrutamento	14
2.4 Modelo de Kirman Analítico	15
2.5 Modelo Kirman no Mercado Financeiro	18
3 METODOLOGIA	20
3.1 Agentes, variáveis e parâmetros	20
3.2 Modelo Computacional: Dinâmica dos Agentes	22
4 MODELO DE KIRMAN COMPUTACIONAL E ADAPTAÇÕES	24
4.1 Modelo de Kirman Computacional × Modelo de Kirman Analítico	24
4.2 Adaptações do Modelo de Kirman	29
4.2.1 Grupos de influência	29
4.2.2 Agentes contrários	34
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	38
REFERÊNCIAS	39

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história pode-se observar a ocorrência de diversas bolhas financeiras no mundo todo. Essas bolhas podem se formar em torno de diversos ativos, como tulipas (tulipomania no século XVIII), empresas de tecnologia (bolha da internet no final do século XX) ou imóveis (crise do subprime de 2008). Estas bolhas são capazes de causar crises globais, impactando na vida de toda sociedade mundial. A crise imobiliária de 2008, por exemplo, fez com que a taxa de desemprego nos Estados Unidos subisse de 4,6% em 2007 para 9,0% em 2009 (Amorim, 2011). Bolhas financeiras podem ocasionar grandes prejuízos sociais em todas as esferas da sociedade em escala global.

A ocorrência da última grande crise em 2008 causou preocupação em economistas do mundo todo. Como era possível a formação de uma bolha de tal proporção sem que economistas tenham previsto ou percebido e impedido? Retrocedendo no tempo, é possível observar indicadores que apontavam para uma clara formação de bolha no mercado imobiliário estadunidense. Como estes indicadores passaram despercebidos por todos especialistas? Essa incerteza gera receio em relação ao futuro, pois a qualquer momento podemos estar novamente diante de uma nova crise econômica em escala global, e novamente não estamos percebendo.

Nesse contexto, a busca por um modelo matemático que explique o surgimento de bolhas financeiras é de extrema importância. Muitos modelos financeiros partem do pressuposto de que todos agentes no mercado agem sempre de forma racional. Porém, esta abordagem não é capaz de explicar o surgimento destas anomalias no mercado. Assim, surge o campo da Finança Comportamental, que tenta implementar a certas irracionalidades aos agentes do mercado, como o comportamento de manada, com o objetivo de explicar tais fenômenos como as bolhas financeiras.

Entender como bolhas se formam é um grande passo para poder identificá-las futuramente ainda em processo de formação, e impedir que atinjam proporções absurdas. Muitas tentativas foram e ainda vêm sendo feitas para criar modelos cada vez mais completos e precisos para descrever esse processo.

Este trabalho apresenta um modelo baseado no comportamento de formigas ao explorarem fontes de alimento proposto por Alan Kirman (1993), que mostra a formação do comportamento de manada que pode ser aplicado ao comportamento

humano e a agentes no mercado financeiro. Junto a este modelo, são acrescentados outros fatores importantes a serem levados em consideração neste processo, como agentes que se posicionam de forma contrária ao efeito de manada e a existência de pequenos grupos de influência dentro da sociedade.

1.1 Tema

Econofísica.

1.2 Delimitação do tema

Modelo econofísico para descrever bolhas financeiras.

1.3 Problema

De que forma os agentes com comportamento contrário à manada e pequenos grupos de influência contribuem para formação ou não de bolhas financeiras?

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo geral

Elaborar um modelo econofísico para bolhas financeiras levando em conta a presença de agentes com comportamento contrário ao efeito de manada e pequenos grupos de influência.

1.4.2 Objetivos específicos

- Adaptar o modelo econofísico proposto introduzindo outros dois fatores: agentes contrários ao efeito de manada e pequenos grupos de influência dentro do mercado.
- Demonstrar e comparar os diferentes resultados para um mercado com e sem agentes contrários ao efeito de manada e pequenos grupos de influência dentro do mercado.

1.5 Justificativa

Como citado anteriormente, bolhas financeiras são capazes de derrubar economias, tanto em escalas locais quanto globais, afetando todos setores da sociedade, não apenas o mercado financeiro e os agentes nele envolvidos. Desta forma, é de extrema importância que existam mecanismos que sejam capazes de explicar e prever estas bolhas, a fim de evitar a repetição de catástrofes como a crise de 2008 no futuro.

Modelos econômicos com esta finalidade já foram elaborados. Um deles é o desenvolvido por Alan Kirman (1993), que criou um modelo matemático que explica o comportamento assimétrico de formigas em uma situação simétrica. Esse comportamento pode ser identificado também em mercados financeiros.

Porém este modelo tem suas limitações. Por exemplo, ao levar em conta o comportamento observado em formigas, Kirman considera que todos os agentes do mercado têm o mesmo impacto uns sobre os outros, e que todos os agentes possuem a mesma tendência para definir seu comportamento.

O trabalho de Gonçalves, Laguna e Iglesias (2012) explica os processos de adoção de uma nova tecnologia no mercado, levando em conta a existência de agentes com comportamento contrário ao efeito manada, e também a existência de pequenos grupos de influência com os quais os agentes se relacionam de forma mais próxima (em vez de considerar a influência de todo sistema igualmente). Esses dois fatores já são suficientes para alterar consideravelmente a forma de adoção de uma nova tecnologia.

Assim, a ideia de introduzir estes dois fatores no modelo baseado em agentes de Kirman visa um novo modelo mais completo, preciso e próximo da realidade, que tenta explicar de forma mais concisa o processo de formação e colapso de bolhas financeiras.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, é apresentado, nas primeiras seções, os conceitos de Finança Comportamental, comportamento de manada e bolhas financeiras. A seção seguinte trata sobre o experimento com formigas que deu origem ao modelo matemático desenvolvido por Alan Kirman (1993), utilizado como base deste trabalho. Nas seções seguintes é apresentada a solução analítica para o modelo de Kirman original, e após a também a solução computacional para este modelo, bem como uma comparação entre as duas soluções.

2.1 Finança Comportamental

A maior parte dos modelos financeiros modernos partem do pressuposto de que os agentes são seres perfeitamente racionais, que possui a capacidade de analisar e interpretar todas as informações disponíveis e tomar as melhores decisões para soluções dos problemas (Halfeld, Torres, 2001). Esses modelos são baseados nas suposições de que “os investidores têm preferências estáveis, formam expectativas racionais e os agentes são capazes de processar de maneira ótima todas as informações disponíveis” (Aldrighi, Milanez, 2005).

Dentro deste contexto de “mercado racional”, a hipótese dos mercados eficientes (HME) garante que o preço de um ativo financeiro é o que melhor reflete as informações disponíveis, fazendo com que o preço deste ativo esteja sempre muito próximo ao seu “valor fundamental”. Mesmo que haja pequenos desvios entre o preço e o valor fundamental causado por investidores desinformados, essa discrepância seria rapidamente explorada pelo restante dos agentes racionais, fazendo com que esse desvio deixe de existir. Esse ajuste de preço do ativo é chamado de “arbitragem” (Aldrighi, Milanez, 2005).

Porém, algumas anomalias no mercado financeiro põem em xeque estes modelos baseados na racionalidade ilimitada dos agentes. O surgimento de bolhas financeiras, como exposto na seção anterior, é um exemplo. Nesse caso, onde existe uma discrepância imensa entre preço do ativo e seu valor fundamental, as teorias mais tradicionais não conseguem explicar como ocorre este processo.

Desta forma, surge um novo campo de estudo: as Finanças Comportamentais. Este novo campo busca aperfeiçoar os modelos tradicionais, introduzindo novos

comportamentos e irracionalidades aos agentes. Desta forma, o agente passa a se comportar como uma pessoa normal, que muitas vezes age de maneira irracional, tendo suas decisões influenciadas por emoções ou erros cognitivos (Halfeld, Torres, 2001). Estes comportamentos, próprios da natureza humana, podem ser responsáveis por grandes desvios de preço do ativo em relação ao seu valor fundamental (Rogers, Securato, Ribeiro, 2007).

Alguns dos comportamentos mais estudados dentro da Finança Comportamental são a aversão à perda, a autoconfiança excessiva, os exageros quanto ao otimismo e ao pessimismo e a sobre-reação às novidades do mercado (Halfeld, Torres, 2001). Dentro destes comportamentos estudados, existe também o chamado “herding behavior”, ou comportamento de manada, que é definida por Almeida (2011, apud Silva, Lucena, 2019) como o comportamento que leva os agentes a ignorarem suas próprias informações para seguir a conduta de outros agentes, como animal em uma manada. O agente toma essa decisão de seguir um grupo devido a ideia de que errar em conjunto é melhor do que errar sozinho (Passos, Pereira, Martins, 2012 apud Silva, Lucena, 2019).

Ainda segundo Silva e Lucena (2019) o agente pode ser impulsionado por emoções, ocorrendo por causa da pressão social. Outra causa, ainda, pode ser a crença de que é improvável que um grande número de pessoas possam estar erradas. Assim, o agente segue o grupo mesmo tendo uma opinião divergente do mesmo, supondo que esta decisão tenha algum fundamento implícito, ou esteja baseada em alguma informação complementar, a qual ele desconhece.

2.2 Bolhas Financeiras

Bolhas financeiras são capazes de gerar prejuízos imensos. O estouro de uma bolha financeira pode desencadear grandes custos sociais, atingindo não somente o mercado financeiro, mas todos os outros setores da sociedade. A exemplo, temos a crise financeira de 2008, onde uma bolha no mercado imobiliário estadunidense causou a falência de instituições financeiras e culminou em uma crise econômica global.

Desta forma, é essencial o desenvolvimento de melhores modelos para bolhas financeiras, devido aos grandes prejuízos causados pelas mesmas. Uma bolha pode

alavancar a volatilidade, desestabilizar e fragilizar mercados financeiros (Herzog, 2015).

Uma bolha financeira (também chamada de bolha especulativa), é uma situação caracterizada por uma grande discrepância entre o preço de um ativo e o seu valor intrínseco. O valor intrínseco tenta refletir um preço justo considerando as hipóteses de riscos e retornos futuros. Nessa situação normalmente ocorre um rápido crescimento seguido por uma contração, comumente de uma forma dramática (Girdzijauskas et al., 2009).

Um icônico exemplo é a tulipomania, que ocorreu na Holanda no século XVII. Na época, um bulbo de tulipa era negociado pelo preço equivalente a 24 toneladas de trigo. Não é necessário muito para concluir que este valor é absurdamente distante do valor real de uma simples tulipa. Mas esta bolha especulativa durou alguns anos, inflando cada vez mais os preços das flores. Em fevereiro de 1637, o preço começou a cair, espalhando pânico no mercado, fazendo com que os comerciantes comesçassem a se desfazer de suas tulipas, e assim os preços despencaram e a bolsa de valores ruiu. Essa quebra da bolsa de valores fez com que muitas pessoas perdessem tudo que haviam da noite para o dia, pois tudo o que lhes restava eram bulbos de tulipas, que não valiam mais nada.

A tulipomania é considerada a primeira bolha especulativa da história. Desde então, tem-se tentado entender, explicar e prever a formação destas bolhas financeiras. Segundo Dymski (1998), são três os elementos que levam a formação destas:

O primeiro elemento é a presença de vigaristas maquinando esquemas para ludibriar o público. O segundo elemento é a predisposição de alguns donos de riquezas em acreditar nos esquemas mais improváveis, com base na mais frágil das evidências. O terceiro elemento são os investidores que agem em manada, seguindo a liderança de outros como cordeiros. O cenário se desdobra então como uma tragédia grega: o vigarista monta uma armadilha, que enreda otários, que atraem cordeiros.

Segundo Sornette e Cauwels (2014), uma bolha se inicia devido a uma nova oportunidade ou expectativa. Essa novidade pode ser o surgimento de uma nova tecnologia, mercado, ou a disparada do preço de um ativo. Isso atrai os primeiros investidores, que conseguem a primeira onda de ganhos. Atraídos pela ideia de ganhos ainda maiores, cada vez mais investidores entram no mercado, agindo em um comportamento de manada. “Chega um ponto em que a demanda sobe conforme o

preço aumenta, e o preço sobe conforme a demanda aumenta” (Sornete, Cauwels, 2014). A situação gera uma espécie de “bola de neve”, atraindo cada vez mais investidores buscando altos retornos, causando uma discrepância cada vez maior entre preço e valor intrínseco. Em algum momento, após um crescimento muito acelerado, os retornos começam a diminuir e a fonte começa a secar. O próximo passo é o colapso do mercado, que ocorre devido à grande quantidade de investidores querendo vender o ativo em questão, fazendo os preços despencarem. Pode-se identificar um comportamento de manada tanto no início da bolha quanto no seu colapso.

2.3 Formigas e Recrutamento

Formigas em uma situação simétrica, comportam-se coletivamente de forma assimétrica. Foi observado em uma série de experimentos (Deneubourg et al., 1987; Pasteels et al., 1987, apud Kirman, 1993) que quando colocadas frente a duas fontes de comida idênticas (e constantemente reabastecidas), formigas tendem a preferir uma das fontes, em vez de dividir-se igualmente entre as duas fontes. O mesmo ocorre quando há apenas uma fonte de alimento, mas dois caminhos simétricos para chegar até ela. Além disso, após um certo tempo, elas invertem a preferência e passam a concentrar-se na outra fonte (ou outro caminho). Esse comportamento assimétrico surge a partir da interação entre os indivíduos. Não é possível deduzir o comportamento de todo grupo analisando indivíduos isolados (Kirman, 1993).

Um fenômeno similar pode ser observado no comportamento humano. Em um estudo (Becker, 1991, apud Kirman, 1993) foi observado que a maioria das pessoas escolhiam um restaurante em vez de outro, do outro da rua, mesmo que a comida e os preços fossem similares, e esta escolha as fizessem ter que esperar na fila do restaurante escolhido. Neste mesmo estudo é sugerido que a popularidade de livros possa ser consequência de um fenômeno parecido com este “efeito de manada”.

No caso das formigas, para entender o fenômeno, é necessário entender o mecanismo de “recrutamento” entre elas, que pode ser comparada à interação social entre os agentes e grupos de influência entre os mesmos. Quando formigas encontram uma fonte de alimento, normalmente elas “recrutam” outras formigas para explorar a mesma fonte. Esse recrutamento pode ser feito através de contato físico ou através de uma “trilha química” para atrair outras formigas. Como toda fonte natural

é esgotável, é vantajoso que, durante a exploração de uma das fontes, algumas formigas procurem por uma nova, para que quando a primeira acabar, o fluxo de comida não caia abruptamente. Isso pode explicar o fato da mudança de preferência entre as fontes sem nenhum motivo aparente (Kirman, 1993).

Figura 1 – Formigas explorando fontes de alimento distintas



Fonte: elaborado pelo autor

2.4 Modelo de Kirman Analítico

Um modelo baseado em agentes (agent-based model, ou ABM, em inglês) é um método computacional para simular a interação de agentes autônomos, capazes de tomar decisões, inseridos em uma rede de agentes, possibilitando entender o seu efeito no sistema como um todo. ABMs mais simples consistem de um sistema de agentes e a interação entre eles (Dawson, Peppe, Wang, 2011).

O comportamento dos agentes inseridos nesse sistema é dado por um conjunto de regras. Diferentemente de modelos clássicos, onde é considerada uma população homogênea, um modelo baseado em agentes considera indivíduos com características distintas dentro da população que interagem entre si, resultando em

um desfecho coletivo. Esse modelo pode fornecer uma análise mais rica e próxima da realidade (Cuevas, 2020).

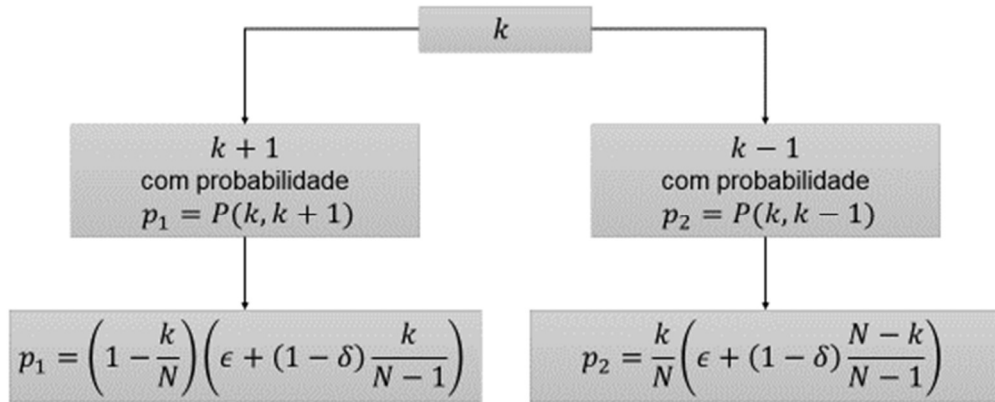
Esse tipo de análise possui uma imensa utilidade e vem sendo utilizado em uma larga diversidade de áreas, como incidência de inundações (Dawson, Peppe, Wang, 2011), análise de uma boa política de estacionamento (Beneson, Martens, Birfir, 2008) ou estudos sobre a pandemia de Covid-19 (Kerr et al., 2021; Cuevas, 2020).

Como definido por Mandes e Winker (2017), o modelo de Kirman é um modelo baseado em agentes do tipo 2, pois possui duas classes que podem ser assumidas pelos agentes. O processo de conversão de uma classe para outra pode ser classificado como “probabilistic switching”, algo como “troca probabilística”. Esta classificação se dá pois a transição de estados é puramente estocástica, descrevendo o comportamento de manada através de recrutamento ou pressão social da maioria.

Considerando a situação onde existe uma fonte “preta” de comida e outra fonte “branca”. Cada uma das N formigas está se alimentando de apenas uma delas por vez. O “estado do sistema” é definido pelo número k de formigas explorando a fonte “preta”:

$$k \in (0, 1, \dots, N)$$

Duas formigas encontram-se aleatoriamente. A primeira é “convertida” para a cor da segunda (ou seja, é recrutada para explorar a sua fonte) com uma probabilidade de $(1 - \delta)$. Ainda existe uma pequena probabilidade ϵ que a primeira mude de cor independentemente, sem a necessidade de um encontro com outra formiga. Essa probabilidade ϵ é necessária para que o sistema não fique estagnado em $k = 0$ ou $k = N$. Essa probabilidade é sempre pequena e quando N for muito grande, ϵ tende a zero. Transferindo o modelo para o caso do mercado financeiro, essa “auto conversão” pode ser interpretada como a chegada de notícias externas ou a substituição de um agente por um novo que não necessariamente compartilhe da mesma visão. A dinâmica de evolução do sistema é dada pelo esquema a seguir.



Nessa dinâmica, $p_1 + p_2 \leq 1$, e para isso é necessário que N seja maior que dois e ϵ seja pequeno o suficiente. Existe ainda a chance de k permanecer inalterado, com probabilidade $p_3 = 1 - p_1 - p_2$.

Dada a dinâmica acima, é interessante determinar a função de distribuição $\mu(k), k = (0, 1, \dots, N)$. Essa função representa a proporção de tempo que o sistema permanece em cada estado. A distribuição é dada por:

$$\mu(k) = \sum_{l=0}^N \mu(l) P(l, k) \quad (1)$$

Como o processo é reversível, temos:

$$\mu(k) P(k, l) = \mu(l) P(l, k) \quad (2)$$

E, portanto:

$$\mu(k) = \frac{\left(\frac{\mu(1)}{\mu(0)}\right) \dots \left(\frac{\mu(k)}{\mu(k-1)}\right)}{1 + \sum_{l=1}^N \left(\frac{\mu(1)}{\mu(0)}\right) \dots \left(\frac{\mu(l)}{\mu(l-1)}\right)} \quad (3)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \frac{\mu(k+1)}{\mu(k)} &= \frac{P(k, k+1)}{P(k+1, k)} \\ &= \frac{\left[1 - \left(\frac{k}{N}\right)\right] \left\{\epsilon + (1 - \delta) \left[\frac{k}{N-1}\right]\right\}}{\left[\frac{(k+1)}{N}\right] \left\{\epsilon + (1 - \delta) \left[1 - \left[\frac{k}{N-1}\right]\right]\right\}} \end{aligned} \quad (4)$$

A forma de $\mu(k)$ depende o valor de ϵ e δ . As figuras 2A, 2B e 2C ilustram três cenários possíveis.

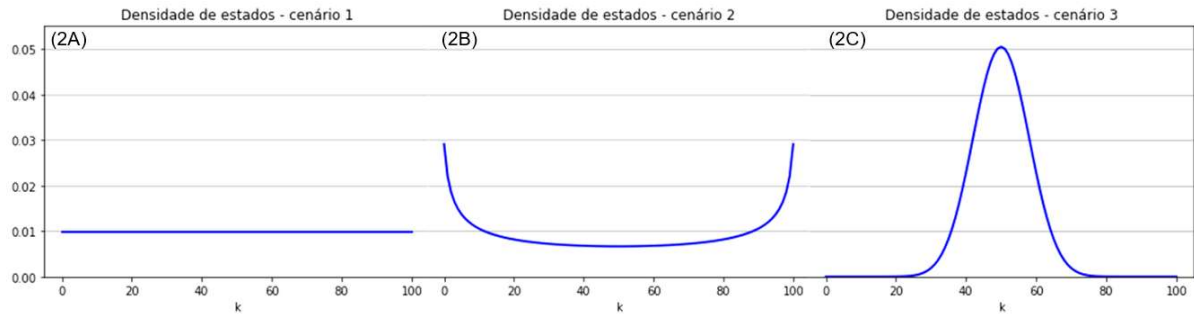


Figura 2 – Função de distribuição. A) Primeiro cenário: $N = 100, \delta = 0.02, \epsilon = \frac{(1-\delta)}{(N-1)}$. B) Segundo cenário: $N = 100, \delta = 0.01, \epsilon = 0.005$. C) Terceiro cenário: $N = 100, \delta = 0.3, \epsilon = 0.15$. Elaborado pelo autor.

O caso da figura 2B corresponde aos experimentos com formigas explorando duas fontes de alimento. Quando a probabilidade de auto conversão é relativamente alta e a probabilidade de conversão for relativamente baixa, o estado k do sistema oscila em torno de $N/2$ (ou seja, o sistema tende a ficar igualmente dividido, como na figura 2C).

Se a probabilidade de auto conversão for muito baixa e a probabilidade de conversão for alta, o sistema permanece pouco tempo no valor intermediário, e se desenvolve nos extremos durante a maior parte do tempo.

É importante destacar que nenhum dos estados é um estado de equilíbrio. Todos os estados são sempre revisitados, e não há nenhuma convergência para nenhum estado em particular.

2.5 Modelo Kirman no Mercado Financeiro

Alan Kirman (1993) traça algumas relações importantes entre o seu modelo baseado no comportamento de formigas e o comportamento de agentes em um mercado financeiro. A primeira relação é que os agentes fazem escolhas (como as formigas, entre duas fontes). Essas escolhas podem ser feitas baseadas em diferentes experiências, expectativas ou ciência de algum fator externo, por exemplo.

Outra relação é com o “recrutamento”, que pode ser pensado como a interação social entre os agentes. Um agente pode recrutar de três formas. Primeiro, um agente

pode convencer outros da superioridade de sua escolha graças a melhores informações ou maior conhecimento. Segundo, a escolha do primeiro agente pode levar, de forma externa, a outros agentes a seguirem a mesma decisão. Terceiro, pode ocorrer algo parecido com o “concurso de beleza keynesiano”, onde os agentes tomam decisões que eles acham que a maioria também irá tomar, ao invés de escolher por conta própria.

Kirman (1993) também usa um exemplo econômico real que apresentam uma dinâmica semelhante ao modelo desenvolvido. Becker (1991, apud Kirman, 1993) demonstrou a preferência dos clientes entre dois restaurantes vizinhos com preço e comida semelhantes. A maioria dos clientes escolhia jantar no mesmo restaurante, mesmo que isso envolvesse ter que aguardar em filas. Becker explicou que a concentração de clientes em um dos restaurantes deve-se ao prazer da experiência de comer no restaurante mais popular. Pode-se aplicar o modelo de Kirman nessa situação, interpretando a popularidade do restaurante como um “recrutamento”.

O modelo de Kirman busca explicar, através do mecanismo de “recrutamento”, a evolução de uma dinâmica complexa como resultado das interações individuais. É importante destacar que o tipo de interação considerado no modelo não depende da proximidade dos agentes. A característica mais importante da evolução do sistema é que há uma mudança eterna. Muitos modelos são desenvolvidos com o intuito de apontar para uma convergência ou um estado de equilíbrio. Mas mercados financeiros são caracterizados por mudanças periódicas devido ao comportamento coletivo dos investidores. Desta forma, o modelo de Kirman pode ajudar a compreender essa dinâmica no campo da economia, indo além de simplesmente explicar a preferência de formigas sobre suas fontes de alimento.

3 METODOLOGIA

Este capítulo apresenta o método empregado no desenvolvimento do modelo, os parâmetros e variáveis do sistema, bem como explica o processo de evolução da simulação.

3.1 Agentes, variáveis e parâmetros

No presente trabalho, o modelo de Kirman é representado por um modelo baseado em agentes (agent-based model) e simulado através do método de Monte Carlo, muito utilizado para simular problemas representados por processos estocásticos. Podemos definir este método como “um método estatístico, no qual se utiliza uma sequência de números aleatórios para a realização de uma simulação” (Yoriyaz, 2009). Desta forma, um modelo que utilize este método deixa de ser determinístico, e passa a ser um modelo governado por componentes probabilísticos (Oliveira, Neto, 2012).

Neste modelo, o sistema é composto por um número N de agentes. Estes agentes podem assumir dois estados (semelhante ao caso das formigas explorando duas fontes de alimento): comprador ou vendedor. Cada agente pode assumir apenas um estado por vez, e o número de agentes compradores é o que define o estado k do sistema. O estado inicial de cada um dos agentes em $t = 0$ é definido pela fração de compradores f_c , determinada antes da simulação. Com $f_c = 1$, o estado inicial de todos os agentes é comprador ($k = N$). Com $f_c = 0.5$, o sistema estará inicialmente dividido de forma aproximadamente igual entre compradores e vendedores ($k \approx N/2$). A informação do estado do sistema é conhecida por todos os agentes. Assim, suas decisões são tomadas baseadas, também, nesta informação.

Para a dinâmica de evolução do sistema, existem duas variáveis independentes, que são a interação social entre os agentes e idiosincrasia, e duas variáveis dependentes, que são a população de compradores e a população de vendedores, que evoluem conforme a probabilidade de compra p_c e a probabilidade de venda p_v , definidas pelas equações (5) e (6).

A interação social é o que determina se um agente irá ou não mudar seu estado devido à influência dos outros agentes. Através dessa interação, levando em consideração a informação do estado do sistema, o agente toma a sua decisão. Todos

os agentes devem interagir em cada passo dado pelo sistema. Já a idiosincrasia é a característica que cada agente tem de tomar decisões próprias, independentemente da interação social. Isso significa que existe uma chance de um agente pode alterar seu estado de forma espontânea, sem influência do resto do sistema.

As populações de compradores e vendedores são o resultado das duas variáveis explicadas anteriormente. Através da interação social entre os agentes e da idiosincrasia, as populações mudam e evoluem a cada passo dado pelo sistema, devido a alteração dos estados individuais dos agentes. Desta forma, em determinado instante t , a população de compradores será igual a k , e a população de vendedores será igual a $N - k$.

O estado inicial e as variáveis são regidas pelos parâmetros que são definidos antes da simulação. Como já mencionado, N é o número total de agentes no sistema, e o parâmetro f_c representa a fração de agentes compradores no estado inicial do sistema quando $t = 0$. Também é definido o valor de $t_{máx}$, que representa a quantidade total de passos (ou evoluções) que o sistema reproduzirá. A interação social dos agentes é determinada pelo parâmetro δ , que determina a probabilidade do agente não tomar a decisão baseado no estado dos outros agentes. Assim, o agente reproduzirá este comportamento de manada com uma probabilidade $1 - \delta$. Já a idiosincrasia é determinada pelo parâmetro ϵ . Quanto maior o valor de ϵ , maior a probabilidade do agente alterar o seu estado de forma independente. A tabela 1 resume as ideias das variáveis e parâmetros do sistema que foram explicados.

Tabela 1 – Variáveis e parâmetros do sistema

VARIÁVEIS	
Variável	Descrição
Interação social	Tomada de decisão influenciada pelos outros agentes do sistema (efeito manada)
Idiosincrasia	Tomada de decisão de forma independente (decisão própria)
População de compradores	Quantidade de agentes compradores no sistema em um determinado instante t

População de vendedores Quantidade de agentes vendedores no sistema em um determinado instante t

PARÂMETROS

Parâmetro	Descrição
N	Quantidade de agentes no sistema
f_c	Fração de agentes compradores no sistema no instante inicial $t = 0$
$t_{m\acute{a}x}$	Quantidade de passos dados pelo sistema
δ	Probabilidade do agente não ser influenciado pelos outros agentes do sistema
ϵ	Probabilidade de alteração no estado de forma independente

3.2 Modelo Computacional: Dinâmica dos Agentes

Na simulação do modelo de Kirman feita neste trabalho são considerados dois estados: compradores e vendedores. Nesta dinâmica, todos agentes podem mudar de um estado o outro.

Inicialmente são estabelecidos os parâmetros iniciais do sistema. É definido o número total N de agentes no sistema, a probabilidade δ do agente não seguir um comportamento de manada e a probabilidade ϵ do agente mudar de estado de forma voluntária. É importante lembrar que a soma das duas probabilidades deve ser menor que 100%, ou seja, $\delta + \epsilon < 1$.

Também é estabelecido o estado inicial do sistema, definido a fração f_c . Esta será a condição inicial do sistema em $t = 0$. Assim, é gerada uma lista com N elementos (cada elemento representando um agente) que podem assumir os estados de comprador ou vendedor. A distribuição destes valores é dada de forma aleatória, respeitando o parâmetro f_c inicialmente definido. Também é definida a quantidade $t_{m\acute{a}x}$ de passos do sistema, ou seja, a quantidade de evoluções que o sistema inteiro terá.

A seguir, o computador analisa individualmente e sequencialmente cada um dos N agentes. Para cada agente, é calculada a probabilidade p_C de uma mudança de estado para “comprador” e uma probabilidade p_V de uma mudança de estado para “vendedor”. Essas probabilidades são calculadas pelas equações abaixo:

$$p_C = \epsilon + \frac{(1 - \delta)k}{N - 1} \quad (5)$$

$$p_V = \epsilon + \frac{(1 - \delta)(N - k)}{N - 1} \quad (6)$$

Portanto, a análise começa pelo primeiro agente da lista anteriormente criada. Nesse momento, é gerado um número aleatório n_a entre 0 e 1. O número n_a é comparado com as probabilidades p_C e p_V para definir que transição ocorrerá (se é que ocorrerá alguma transição). São estabelecidas as condições para essa definição:

- 1) Se o estado inicial do agente for comprador e $n_a < p_V$, então o agente passa a ser vendedor;
- 2) Se o estado inicial do agente for vendedor e $n_a < p_C$, então o agente passa a ser comprador.

É importante ressaltar que cada agente pode sofrer apenas uma transição de estado por passo dado pelo sistema. Desta forma, é impossível que um agente altere seu estado individual de comprador para vendedor, e, após, para comprador novamente no mesmo passo.

Após a análise individual de cada um dos N agentes do sistema e a realização todas as transições necessárias, é finalizado um dos passos do sistema. Neste momento, a quantidade de agentes compradores e vendedores é armazenada. Esse processo se repete até que sejam completados todos os $t_{máx}$ passos definidos nos parâmetros iniciais. As quantidades de compradores e vendedores ao final de cada passo representam a dinâmica de evolução das populações.

4 MODELO DE KIRMAN COMPUTACIONAL E ADAPTAÇÕES

Neste capítulo é mostrado o resultado do modelo de Kirman computacional desenvolvido e também são implementadas as mudanças propostas: grupos de influência e agentes contrários

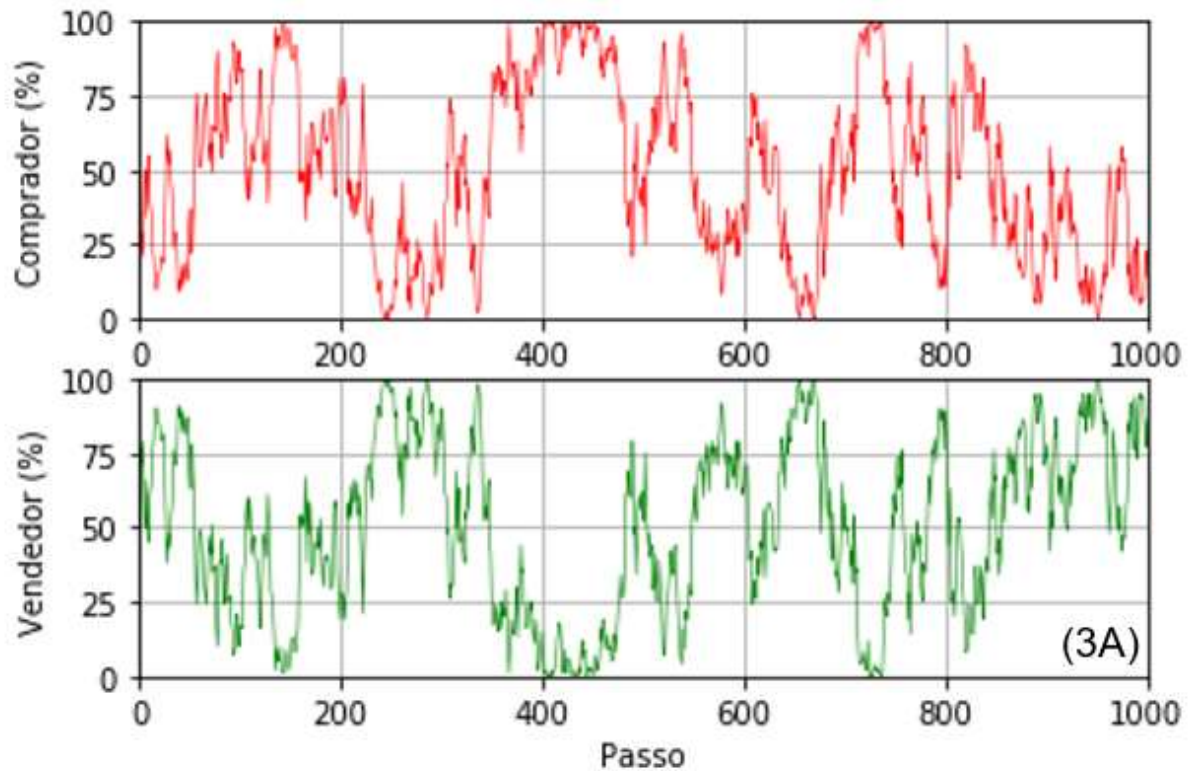
4.1 Modelo de Kirman Computacional × Modelo de Kirman Analítico

É possível reproduzir os cenários propostos na solução analítica ajustando os parâmetros da solução computacional para os mesmos indicados na figura 2. O primeiro cenário, apresentado na figura 2A, estabelece os parâmetros $N = 100$, $\delta = 0.02$, $\epsilon = (1 - \delta)/(N - 1)$. Considerando $t_{máx} = 1000$, podemos observar, na figura 3A, a evolução das duas populações. Pode-se ver que o sistema é muito instável, passando por grandes variações a todo momento.

A figura 3B mostra as densidades de estados desta mesma configuração. O gráfico de densidade de estados não aparenta apresentar nenhuma forma específica no caso de $t_{máx} = 1000$. Isso ocorre pois o valor assumido por $t_{máx}$ é muito baixo. As curvas em verde e vermelho apresentam a densidade de estados para os mesmos parâmetros considerados anteriormente, porém com $t_{máx} = 10000$ e $t_{máx} = 100000$, respectivamente.

Como é possível notar, quando consideramos valores maiores para $t_{máx}$, a densidade de estados da simulação se assemelha muito à situação apresentada na figura 2A. Apesar de pequenas flutuações, a densidade se aproxima muito de ser constante. Isso indica que o sistema permanece aproximadamente a mesma quantidade de tempo em todos os estados, desde $k = 0$ a $k = N$.

O estado $k = N$, quando todos agentes são compradores, pode ser interpretado como a formação de uma bolha financeira no sistema, e o estado $k = 0$, quando todos agentes são vendedores, pode ser interpretado como um “crash” (estouro) dessa bolha.



Densidade de estados - cenário 1

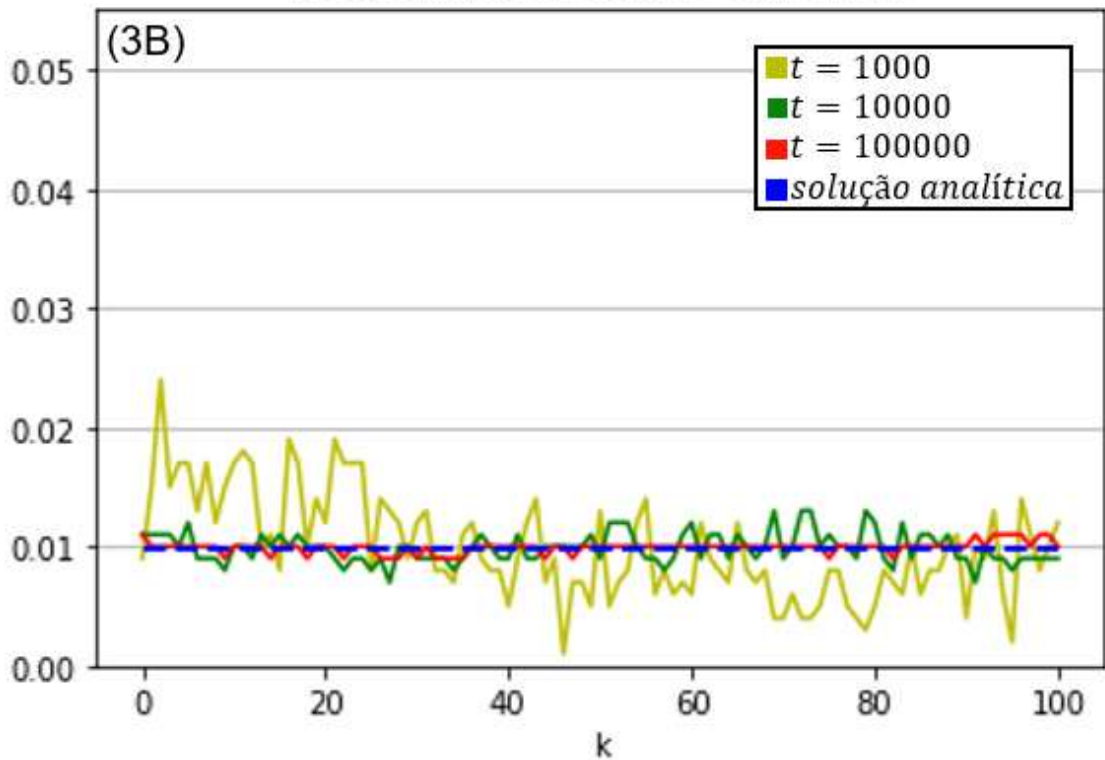


Figura 3 – Modelo de Kirman: primeiro cenário. A) Dinâmica das populações para $t_{m\acute{a}x} = 1000$. B) Função de distribuição para diferentes valores de $t_{m\acute{a}x}$. Elaborado pelo autor.

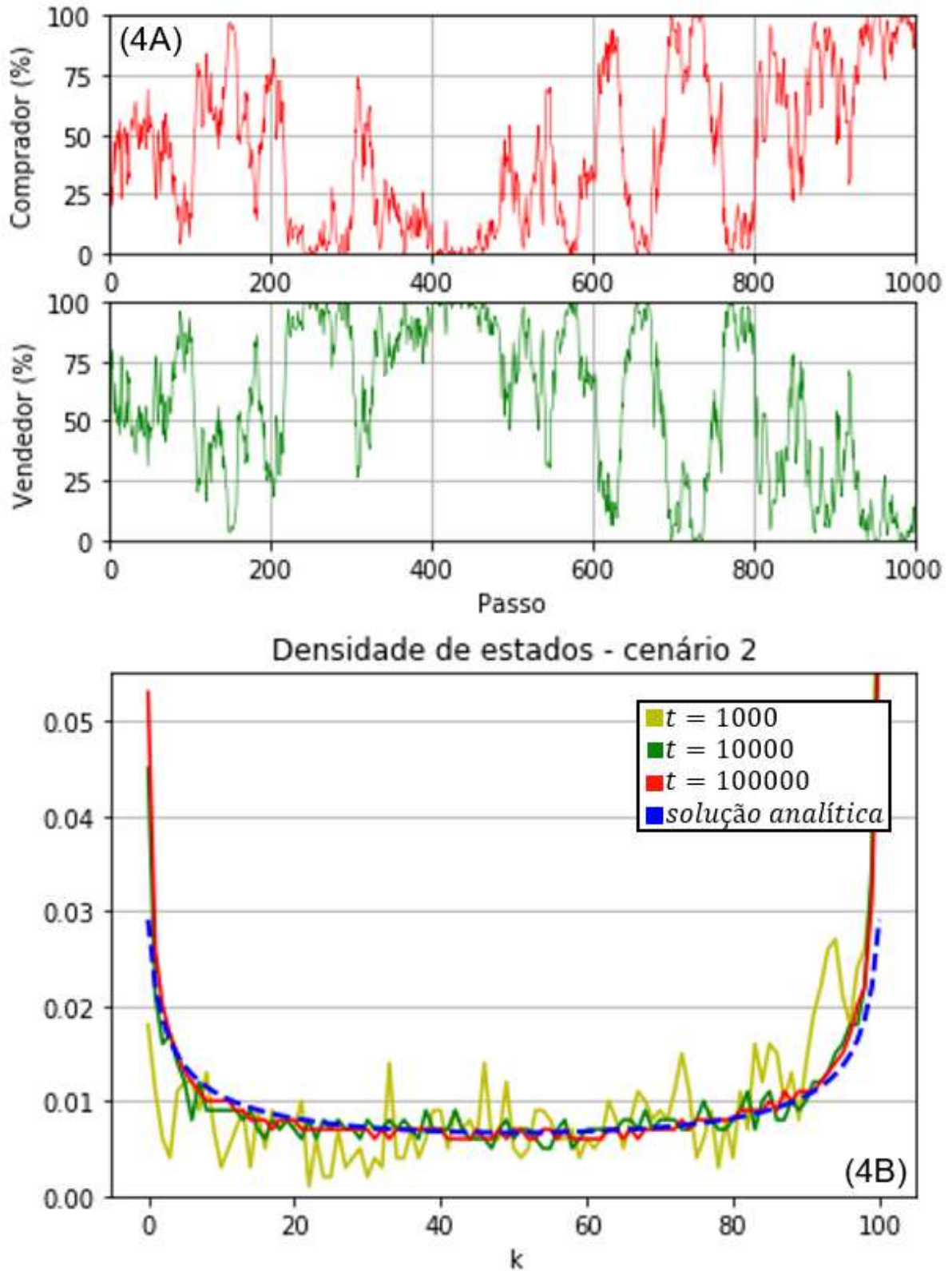


Figura 4 – Modelo de Kirman: segundo cenário. A) Dinâmica das populações para $t_{máx} = 1000$. B) Função de distribuição para diferentes valores de $t_{máx}$. Elaborado pelo autor.

O segundo cenário, apresentado na figura 2B, estabelece os parâmetros $N = 100$, $\delta = 0.01$, $\epsilon = 0.005$. Ajustando novamente a simulação para estes valores e $t_{m\acute{a}x} = 1000$, podemos observar, na figura 4A, a evolução das duas populações. A figura 4B expõe a densidade de estados para esta situação.

Novamente, com o valor de $t_{m\acute{a}x}$ muito baixo não é possível identificar um padrão no gráfico da figura 4B. A figura 4B mostra ainda a densidade de estados para os mesmos parâmetros considerados anteriormente, porém com $t_{m\acute{a}x} = 10000$ e $t_{m\acute{a}x} = 100000$, respectivamente. As curvas apresentadas deixam mais claro o comportamento do sistema. O gráfico se assemelha muito ao apresentado no cenário 2 da solução analítica. O sistema permanece mais tempo nos estados extremos, ou seja, mais próximos a $k = 0$ e $k = N$. É possível ver na dinâmica de evolução das populações que o sistema passa por transições muito abruptas entre situações de bolha financeira para situações de “crash”. Assim, o segundo cenário acaba sendo muito propício para a ocorrência destes fenômenos.

O terceiro e último cenário proposto, apresentado na figura 2C, se dá pelos parâmetros $N = 100$, $\delta = 0.3$, $\epsilon = 0.15$. Considerando $t_{m\acute{a}x} = 1000$, vemos a evolução das populações na figura 5A, e a densidade de estados deste cenário na figura 5B, em amarelo.

Neste caso, mesmo com o valor de $t_{m\acute{a}x}$ baixo, já é possível identificar o padrão de comportamento do sistema. A curva da densidade é semelhante à situação apresentada na figura 2C. Essa semelhança fica ainda mais evidente para este mesmo cenário com $t_{m\acute{a}x} = 10000$ e $t_{m\acute{a}x} = 100000$, como é mostrado na figura 5B.

Nesse caso, o sistema permanece quase todo o tempo em estados mais equilibrados, com a população dividida de forma aproximadamente igualitária entre compradores e vendedores. Em nenhum momento o sistema permanece nos estados mais extremos. Ou seja, neste cenário, em momento algum formam-se bolhas financeiras no sistema, pois não ocorrem estados em que $k = 0$ e $k = N$.

Pode-se concluir que a solução computacional apresenta de forma satisfatória os resultados demonstrados na solução analítica. Em todos os três cenários propostos, a simulação reproduziu o comportamento esperado do sistema.

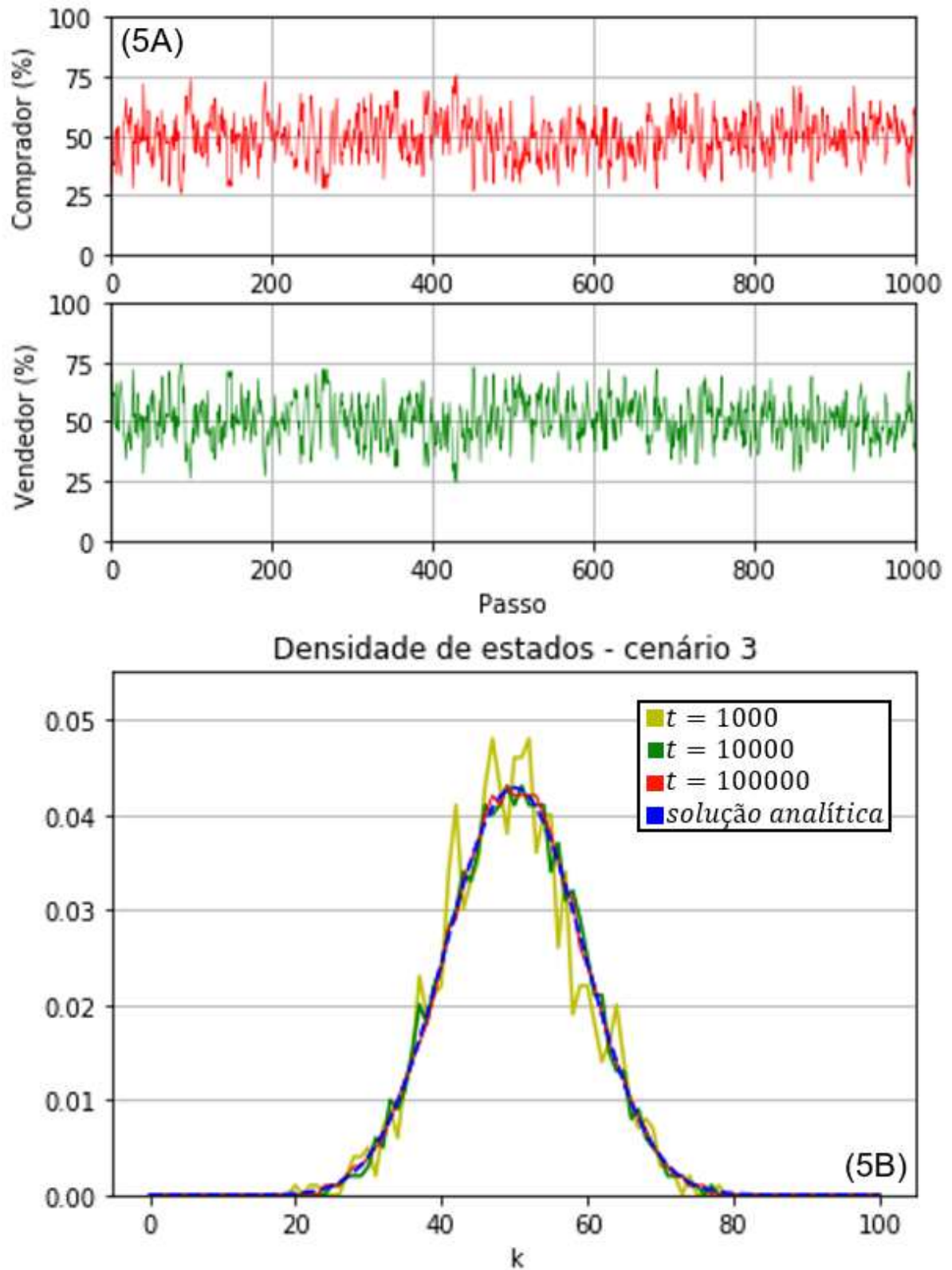


Figura 5 – Modelo de Kirman: terceiro cenário. A) Dinâmica das populações para $t_{máx} = 1000$. B) Função de distribuição para diferentes valores de $t_{máx}$. Elaborado pelo autor.

4.2 Adaptações do Modelo de Kirman

Esta seção traz a implementação das adaptações propostas no início do trabalho – grupos de influência e agentes contrários – e seus efeitos no sistema.

4.2.1 Grupos de influência

Partindo do modelo de Kirman original apresentado até então, o próximo passo é a introdução de novos elementos para análise, com o objetivo de criar um modelo mais completo. A primeira mudança é a introdução de grupos de influência, proposto por Gonçalves, Laguna e Iglesias (2012) ao investigar a adoção de novas tecnologias na sociedade.

No modelo considerado até agora, ao ser calculada a probabilidade de transição de um estado para o outro, considera-se que cada agente sabe exatamente o estado de todo o sistema, ou seja, um indivíduo sabe o estado de todos os outros indivíduos. Isso ocorre pois nas equações 5 e 6 utiliza-se o valor de N para calcular os valores de p_C e p_V , que definem as transições.

No mundo real, ninguém conseguiria ter consciência acerca de todos agentes do sistema. É mais provável que o indivíduo tenha consciência do estado de apenas alguns agentes mais próximos a ele, como familiares, amigos e colegas, por exemplo. Desta forma, é preciso modificar o modelo para considerar que cada agente tenha contato apenas com um grupo de influência específico dentro de todo sistema, e baseado nesse grupo, são calculados os valores de p_C e p_V para cada agente.

Portanto, agora será considerado o novo parâmetro N_g , que representa o tamanho do grupo de influência de cada agente. Convém lembrar que $N_g < N$. Assim, as equações 5 e 6 passam a ser:

$$p_C = \epsilon + \frac{(1 - \delta)k'}{N_g} \quad (7)$$

$$p_V = \epsilon + \frac{(1 - \delta)(N_g - k')}{N_g} \quad (8)$$

A variável k também é modificada. No modelo original, esta variável indica a população de compradores entre todos N agentes. Com a modificação dos grupos de influência, k passa a ser k' , que representa a quantidade de compradores dentro dos N_g agentes dentro do grupo de influência. É importante ressaltar que a escolha dos

agentes para compor cada um dos grupos de influência é aleatória em todos os passos do sistema.

Ajustando os parâmetros referentes a cada um dos três cenários, e considerando o caso mais extremo de grupo de influência com $N_g = 2$, pode-se observar nas figuras 6, 7 e 8 que a densidade de estados nos três casos é exatamente a mesma que o sistema sem grupos de influência, prevista pela solução analítica original.

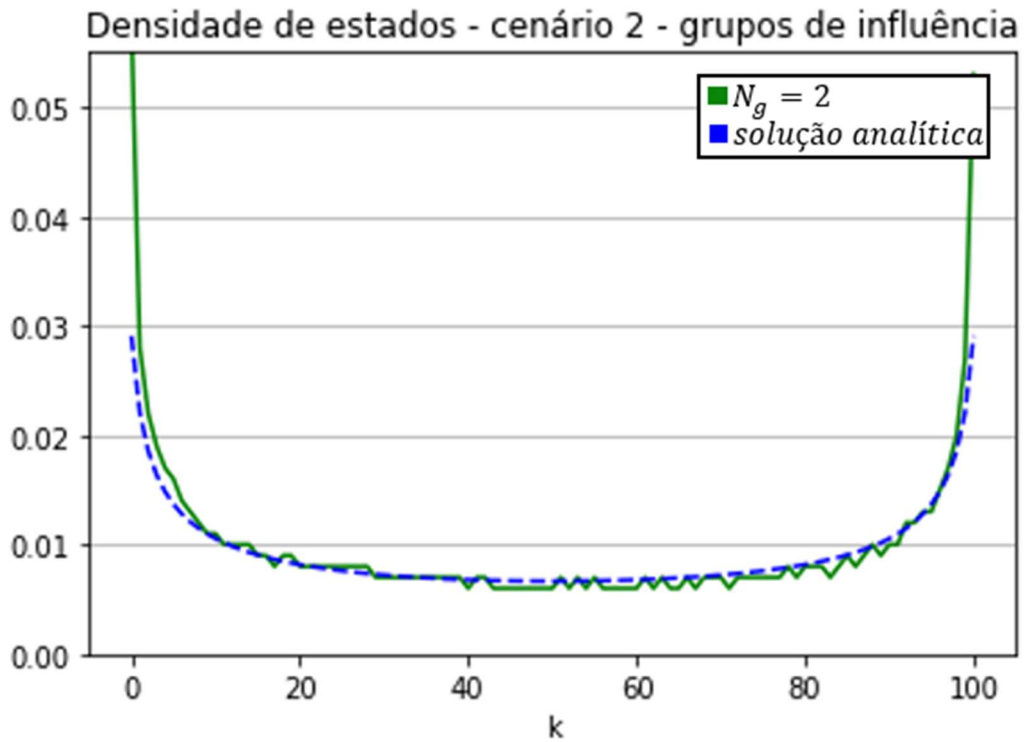
Desta forma, os grupos de influência acabam não tendo efeito sobre o sistema como um todo. Apesar de os agentes considerarem apenas o estado de outros dois agentes (em vez do estado de todo o sistema), isso não interfere no desfecho final de nenhum dos cenários.

Como mostrado por Gonçalves, Laguna e Iglesias (2012), os grupos de influência alteravam a velocidade com que a nova tecnologia era adotada pelos agentes do sistema. Quanto menor o grupo, maior essa velocidade. Porém, o estado final do sistema não é alterado pela presença destes grupos.

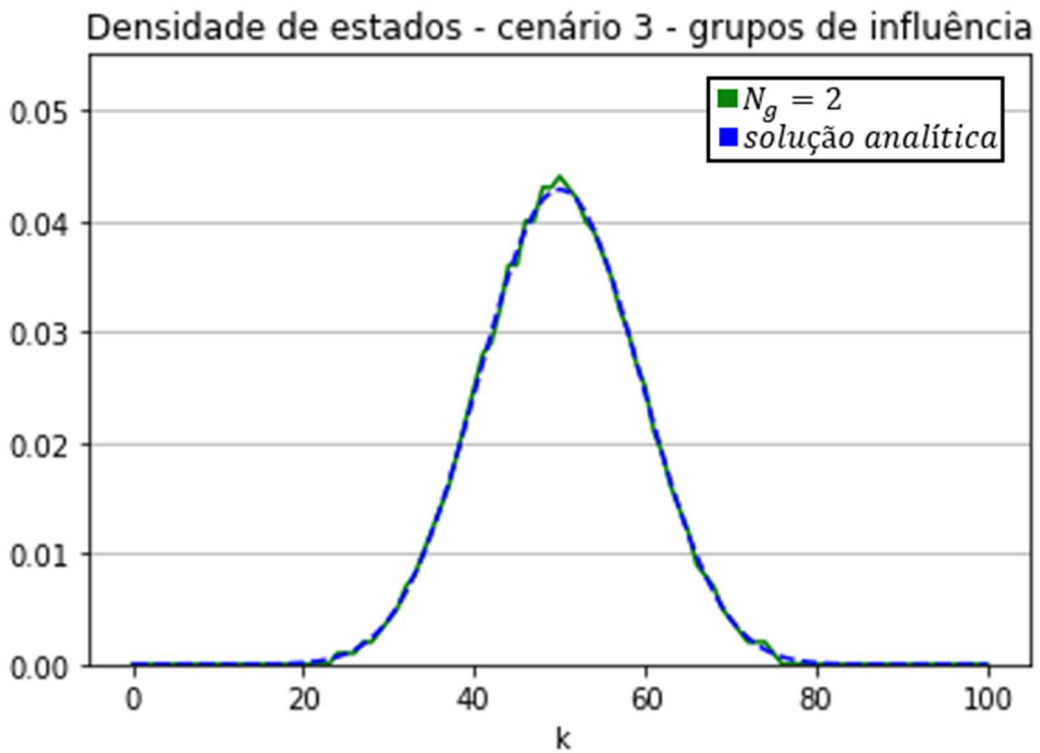
Figura 6 – Cenário 1 com grupos de influência ($N_g = 2$)



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 7 – Cenário 2 com grupos de influência ($N_g = 2$)

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 8 – Cenário 3 com grupos de influência ($N_g = 2$)

Fonte: elaborado pelo autor.

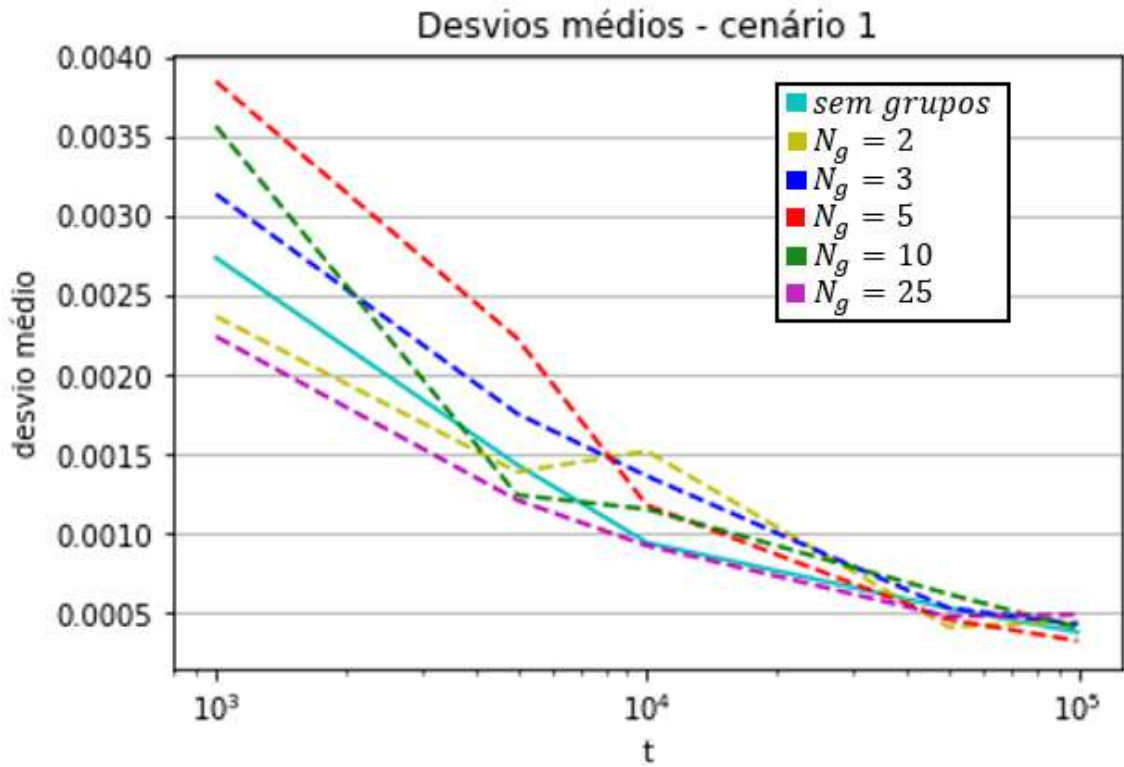
Por isso, esperava-se que o efeito no modelo de Kirman fosse o mesmo. Porém, comparando os desvios médios entre a solução computacional para o sistema com e sem grupos de influência, e a solução analítica, verificou-se que esta hipótese não se confirma. A tabela 2 mostra os valores destes desvios para diferentes valores de $t_{máx}$, considerando ainda $N_g = 2$. As flutuações não seguem um padrão, e não fica claro qual dos modelos se aproxima mais rapidamente da solução analítica. As figuras 9, 10 e 11 também mostram os desvios médios considerando diferentes grupos de influência em função de $t_{máx}$.

Tabela 2 – Desvios médios do sistema em relação à solução analítica

Cenário 1	Sem grupos de influência	Com grupos de influência
$t_{max} = 1000$	0,00273248	0,00236401
$t_{max} = 5000$	0,00143117	0,00138555
$t_{max} = 10000$	0,00094137	0,00151601
$t_{max} = 50000$	0,00052902	0,00041157
$t_{max} = 100000$	0,00037759	0,00044515
Cenário 2	Sem grupos de influência	Com grupos de influência
$t_{max} = 1000$	0,00281426	0,00409878
$t_{max} = 5000$	0,00177916	0,00243148
$t_{max} = 10000$	0,00160946	0,00146729
$t_{max} = 50000$	0,00121994	0,00109820
$t_{max} = 100000$	0,00110872	0,00119084
Cenário 3	Sem grupos de influência	Com grupos de influência
$t_{max} = 1000$	0,00136860	0,00194389
$t_{max} = 5000$	0,00059135	0,00084086
$t_{max} = 10000$	0,00061806	0,00058147
$t_{max} = 50000$	0,00027405	0,00028441
$t_{max} = 100000$	0,00025970	0,00023445

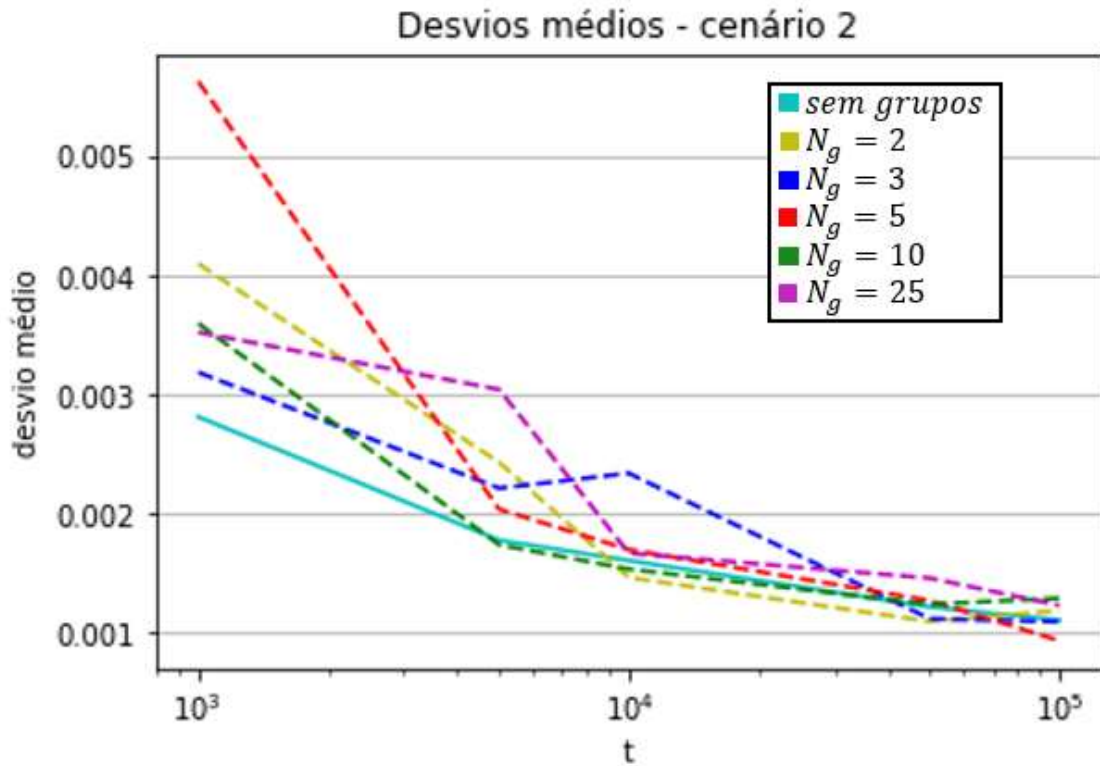
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 9 – Desvios médios do primeiro cenário



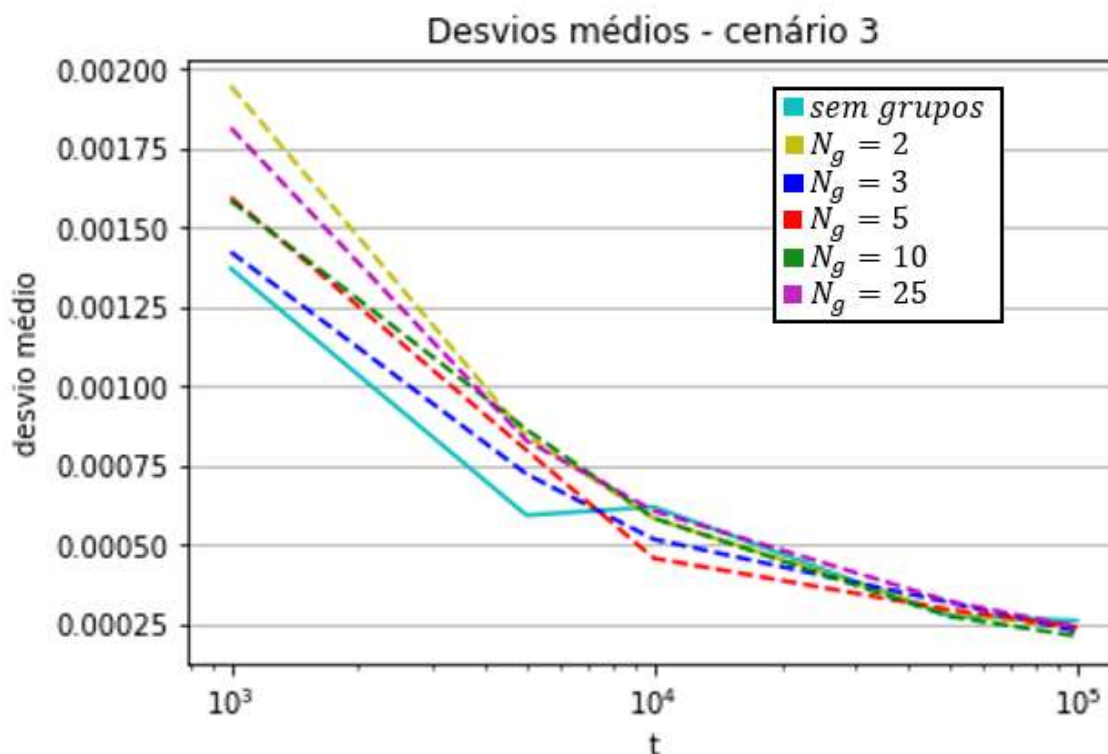
Fonte: elaborado pelo autor

Figura 10 – Desvios médios do segundo cenário



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 11 – Desvios médios do terceiro cenário



Fonte: elaborado pelo autor

4.2.2 Agentes contrários

A segunda mudança introduzida no modelo são os “agentes contrários”, também propostos por Gonçalves, Laguna e Iglesias (2012). No modelo apresentado até então, todos os agentes estão susceptíveis ao comportamento de manada, ou seja, de seguir o comportamento da maioria dos agentes do sistema. Porém numa situação real, nem todos os agentes dentro do mercado seguem este tipo de tendência. Desta forma, os “contrários” são agentes que evitam o comportamento de manada, indo na direção contrária da maior parte do sistema.

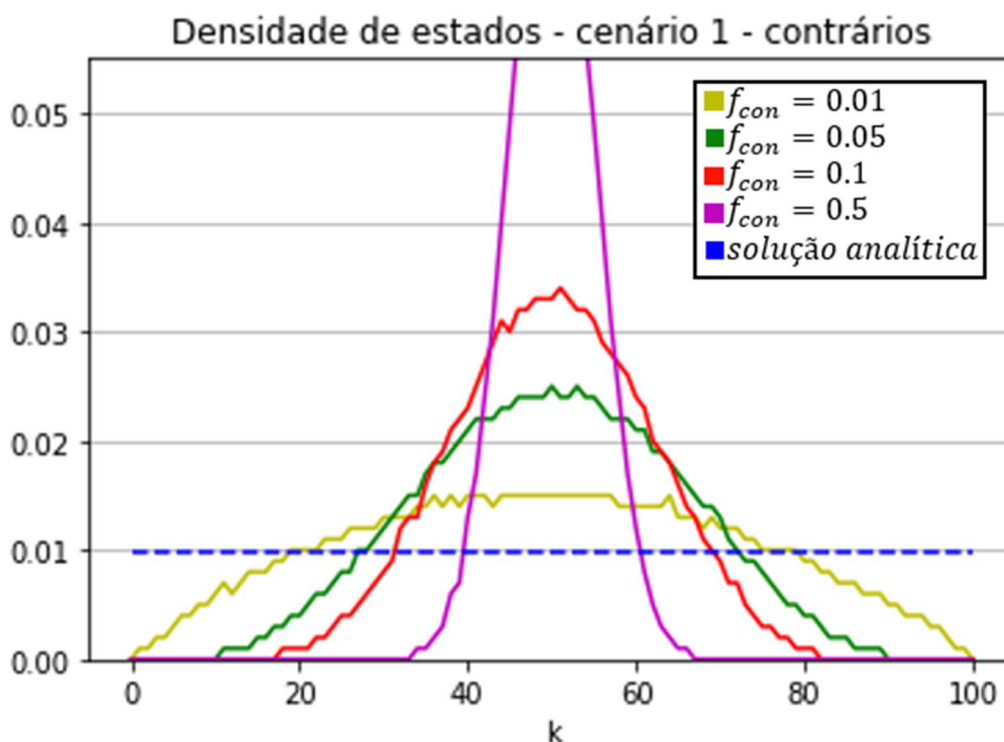
Assim, deve-se modificar o modelo para poder contemplar a existência desse tipo de agentes. Ao início da simulação, além de definir a lista que determina o estado inicial de cada agente no sistema, agora é definida também uma lista que determina se os agentes são imitadores (como os considerados até então) ou contrários. O cálculo das probabilidades p_C e p_V é feito da mesma forma que o modelo Kirman original. Porém, para definir as transições de estado dos agentes, agora são acrescentadas mais duas condições. Desta forma, temos:

- 1) Se o agente for imitador, o estado inicial for comprador e $n_a < p_V$, então o agente passa a ser vendedor;
- 2) Se o agente for imitador, o estado inicial for vendedor e $n_a < p_C$, então o agente passa a ser comprador;
- 3) Se o agente for contrário, o estado inicial for comprador e $n_a < p_C$, então o agente passa a ser vendedor;
- 4) Se o agente for contrário, o estado inicial for vendedor e $n_a < p_V$, então o agente passa a ser comprador.

As duas primeiras condições são iguais às já consideradas até então. As duas últimas são adicionadas de forma a contemplar os agentes contrários.

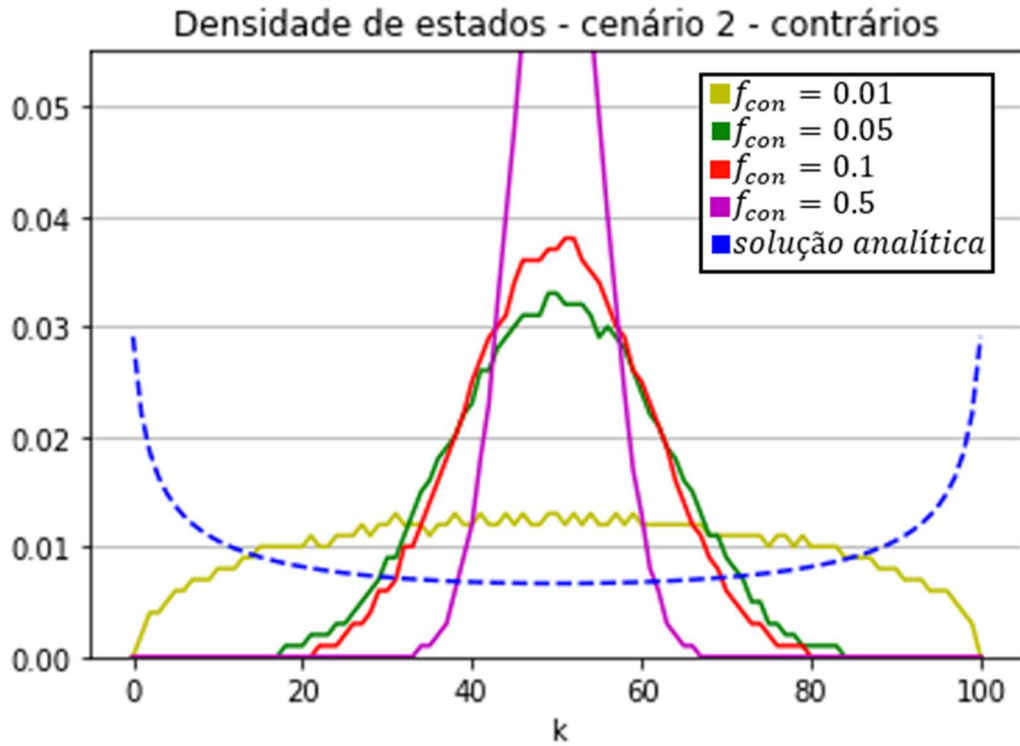
Como é possível observar, no caso dos agentes contrários, as probabilidades de transição são invertidas. Assim, por exemplo, se o valor de p_C for muito alto (o que indica que a maior parte do sistema é composta por compradores), o agente contrário tende a tornar-se ou permanecer um vendedor. Desta forma, ele evita o efeito de manada e o comportamento da maioria. As figuras 12, 13 e 14 mostram a densidade de estados para os três cenários com o acréscimo de diferentes frações de agentes contrários (f_{con}) no sistema.

Figura 12 – Cenário 1 com agentes contrários



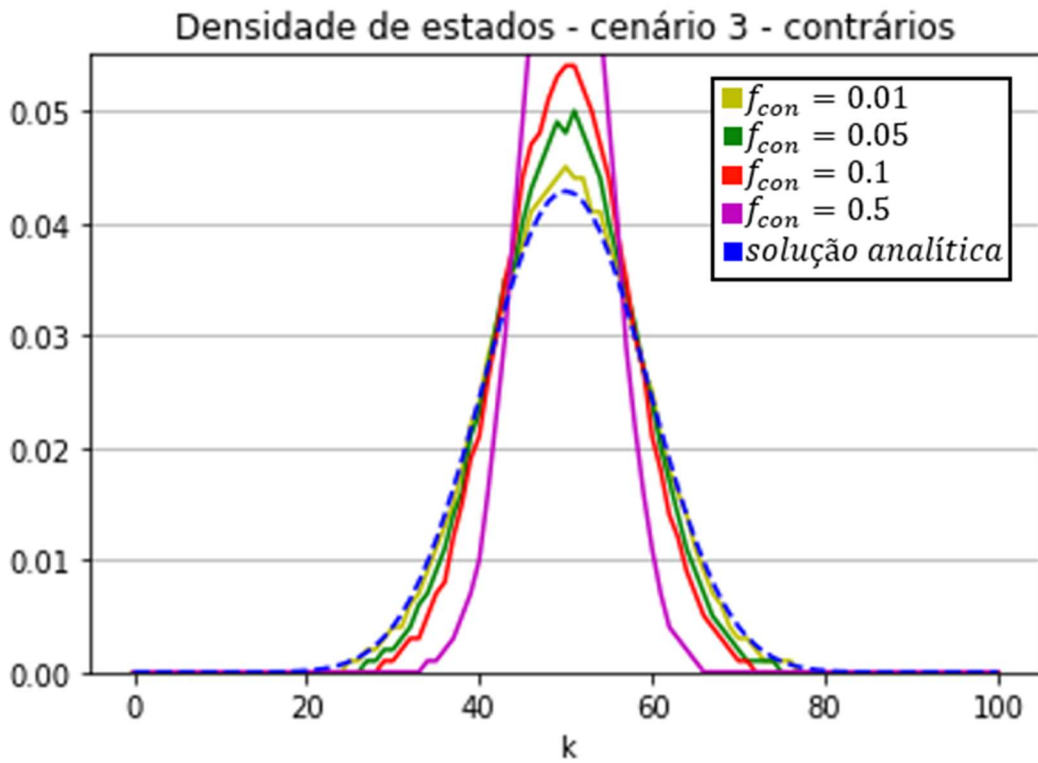
Fonte: elaborado pelo autor

Figura 13 – Cenário 2 com agentes contrários



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 14 – Cenário 3 com agentes contrários



Fonte: elaborado pelo autor

O efeito dos agentes contrários é muito perceptível. Pode-se ver que no primeiro e segundo cenários os estados mais extremos deixam de existir devido a existência destes agentes. Em momento algum o sistema apresenta os estados onde todos os N agentes são compradores ou vendedores. Desta forma, os agentes contrários acabam evitando a formação de bolhas financeiras no sistema. Já no caso do terceiro cenário, onde estes estados já não existiam, este comportamento é reforçado pelos agentes contrários.

Estes agentes contrários apresentam um efeito de restringir estados mais distantes de $k = N/2$. A introdução de uma fração maior destes agentes faz com que o sistema reproduza estados cada vez menos extremos.

Pode-se observar que quanto maior a fração de agentes contrários dentro do sistema, menor será a faixa de estados que o sistema reproduzirá, concentrando-se a maior parte do tempo em estados cada vez mais equilibrados, próximos a uma divisão igualitária entre compradores e vendedores.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo de Kirman traça algumas relações interessantes entre a situação das formigas explorando fontes de alimento e o mercado financeiro. Pode-se observar que quando o valor de ϵ é suficientemente baixo em relação à δ , o que indica um alto efeito de manada no sistema e baixa tomada de decisão própria dos agentes, o sistema apresenta muitas situações de bolhas financeiras e “crashes” destas, onde todos os agentes se encontram ora compradores e ora vendedores, resultando em ascensões e quedas muito abruptas no sistema. Por outro lado, quando os agentes têm uma maior tomada de decisão própria, o sistema não apresenta essas situações. Os agentes não se concentram todos como vendedores ou compradores em momento algum, e o sistema apresenta estados mais equilibrados, sem transições abruptas.

A inserção de grupos de influência no sistema não apresentou nenhum efeito sobre este. Não alterou a densidade de estados e nem a velocidade com que esta curva atinge a forma esperada pela solução analítica, independentemente do tamanho do grupo de influência.

Já a introdução dos agentes contrários apresentou um efeito muito visível no sistema. A presença destes agentes faz com que os estados mais extremos desapareçam em todos os três cenários. O acréscimo de uma fração mínima desses agentes no sistema já é suficiente para reproduzir este efeito. Assim, os agentes contrários impedem as situações onde todos os agentes do sistema são compradores ou vendedores, mantendo o sistema em estados mais equilibrados, evitando a formação de bolhas e crashes em todos os três cenários.

REFERÊNCIAS

ALDRIGHI, Dante M.; MILANEZ, Daniel Y. **Finança Comportamental e a Hipótese dos Mercados Eficientes**. Revista de Economia Contemporânea, Rio de Janeiro, v. 9, n. 1, p. 41-72, jan./abr. 2005.

AMORIM, Isadora Moreira de; **Finanças Comportamentais e a Formação de Bolhas Especulativas**. 2011. 37 f. UNESP, Araraquara, 2011.

BENESON, Itzhak; MARTENS, Karel; BIRFIR, Slava. **PARKAGENT: An agent-based model of parking in the city**. Computers, Environment and Urban Systems, v. 32, n. 6, p. 431 – 439, 2008.

BIKHCHANDANI, Sushil; SHARMA, Sunil. **Herd Behavior in Financial Markets: A Review**. IMF Working Paper, n. 00/48, mar. 2000.

CUEVAS, Erik. **An agent-based model to evaluate the COVID-19 transmission risks in facilities**. Computers in biology and medicine, v. 121, 2020.

DAWSON, Richard J.; PEPPE, Roger; WANG, Miao. **An agent-based model for risk-based flood incident management**. Natural Hazards, v. 59, p. 167 – 189, 2011.

DYMSKI, Gary A. **“Economia de bolha” e crise financeira no Leste Asiático e na Califórnia: uma perspectiva espacializada de Minsky**. Economia e Sociedade, v. 7, n. 2, p. 73 – 136, 1998.

GIRDZIJAUSKAS, Stasys. et al. **Formation of economic bubbles: causes and possible preventions**. Technological and Economic Development, v. 15, n. 2, p. 267 – 280, 2009.

GONÇALVES, Sebastian; LAGUNA, M. F.; IGLESIAS, Jose Roberto. **Why, when, and how fast innovations are adopted**. The European Physical Journal B, v. 85, n. 192, 2012.

HALFELD, Mauro; TORRES, Fábio de F. L. **Finanças Comportamentais: aplicações no contexto brasileiro**. Revista de Administração de Empresas, São Paulo, v. 41, n. 2, p. 64 – 71, abr./jun. 2001.

HERZOG, Bodo. **An Econophysics Model of Financial Bubbles**. Natural Science, n. 7, p. 55 – 63, 2015.

KERR, Cliff C.; **Covasim: An agent-based model of COVID-19 dynamics and interventions**. PLoS computational biology, v. 17, n. 7, 2021.

KIRMAN, Alan. **Ants, rationality, and recruitment**. The Quarterly Journal of Economics, v. 108, n. 1, p. 137 – 156, 1993.

MANDES, Alexandru; WINKER, Peter. **Complexity and model comparison in agent based modeling of financial markets**. Journal of Economic Interaction and Coordination, v. 12, p. 469 – 506, 2017.

ROGERS, Pablo; SECURATO, José R.; RIBEIRO, Kárem C. de S. **Finanças comportamentais no Brasil: um estudo comparativo**. Revista de Economia e Administração, v. 6, n. 1, p. 49-68, jan./mar. 2007.

SILVA, Vanessa M.; LUCENA, Wenner G. L. **Finanças Comportamentais: Análise dos Fatores do Efeito Manada em Empresas Listadas na B3**. Revista Catarinense da Ciência Contábil, Florianópolis, v. 18, p. 1 – 20, 2019.

SORNETTE, Didier; CAUWELS, Peter. **Financial bubbles: mechanisms and diagnostics**. Review of Behavioral Economics, v. 2, n. 3, p. 279 – 305, 2015.

YORIYAZ, Hélio. **Método de Monte Carlo: princípios e aplicações em Física Médica**. Revista Brasileira de Física Médica, v. 3, n. 1, p. 141 – 149, 2009.