

**UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS - UNISINOS
UNIDADE ACADÊMICA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
NÍVEL MESTRADO**

JORGE AUGUSTO DIAS SAMSONESCU

**CARTEIRAS DE BAIXA VOLATILIDADE:
Menor risco e maior retorno no mercado de ações brasileiro**

**São Leopoldo
2015**

Jorge Augusto Dias Samsonescu

CARTEIRAS DE BAIXA VOLATILIDADE:

Menor risco e maior retorno no mercado de ações brasileiro

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, pelo Programa de Pós-Graduação em ECONOMIA da Universidade do Vale do Rio dos Sinos - UNISINOS

Orientador: Prof. Dr. Igor Alexandre Clemente de Moraes

São Leopoldo

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S193c Samsonescu, Jorge Augusto Dias

Carteiras de baixa volatilidade : menor risco e maior retorno no mercado de ações brasileiro / Jorge Augusto Dias Samsonescu ; orientador Igor Alexandre Clemente de Moraes. – São Leopoldo : Unisinos, 2015.

52 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade do Vale do Rio dos Sinos. Programa de Pós-Graduação em Economia. Mestrado em Economia. São Leopoldo, 2015.

1. Mercado financeiro. 2. Mercado de ações – Brasil. 3. Carteira de mínima variância. 4. Carteira – Avaliação de desempenho. 5. Volatilidade. I. Moraes, Igor Alexandre Clemente de. II. Título.

CDU 336.76

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à minha esposa Sabrina, que me incentivou a enfrentar o desafio e permaneceu ao meu lado em todos os momentos, pois sem ela eu jamais teria sequer iniciado esta jornada.

Agradeço ao Banco do Brasil, que tem apoiado meu desenvolvimento acadêmico através de bolsas de estudos, essenciais para a conclusão do programa.

Agradeço também aos professores do PPG de Economia da UNISINOS pelos bons momentos e pelo compartilhamento do conhecimento. Agradeço especialmente ao meu orientador Igor Moraes, por ter me guiado durante este trabalho.

Por fim, agradeço aos meus colegas, que se transformaram em amigos ao longo do programa. Em especial à colega Eduarda, pela grande parceria em sala de aula.

*“Não é preciso fazer coisas extraordinárias para
obter resultados extraordinários.”*

(Warren Buffett)

RESUMO

Este trabalho analisa o desempenho fora da amostra de carteiras de mínima variância e baixa volatilidade no mercado de ações brasileiro entre 2003 e 2013, comparativamente ao índice IBOVESPA e a uma carteira igualmente ponderada. As carteiras de mínima variância foram otimizadas com restrição de posições vendidas e limite de peso para os ativos. A matriz de covariância foi estimada pelo método amostral e método *shrinkage* proposto por Ledoit e Wolf (2003). A carteira de baixa volatilidade foi estruturada de forma similar ao método do índice *S&P 500 Low Volatility*. O período utilizado para o rebalanceamento das carteiras foi quadrimestral e os ativos elegíveis para as carteiras foram os componentes do IBOVESPA em cada quadrimestre analisado. A comparação das carteiras foi feita através dos indicadores de retorno, desvio padrão e índice de Sharpe anualizados, MVaR e *maximum drawdown*. Os resultados apontam para a importância na escolha do limite de pesos para os ativos das carteiras de mínima variância. As carteiras de menor risco obtiveram os melhores resultados em todos os indicadores testados.

Palavras-chave: Carteira de mínima variância. Baixa volatilidade. Otimização de carteiras. Matriz de covariância. Avaliação de desempenho.

ABSTRACT

This study analyzes the out-of-sample performance of minimum-variance and low volatility portfolios in the Brazilian stock market from 2003 to 2013, when compared to IBOVESPA index and an equally weighted portfolio. The minimum variance portfolios have been optimized with short selling restriction and weight limits for the assets. The covariance matrix was estimated by sample method and shrinkage method proposed by Ledoit & Wolf (2003). The low volatility portfolio was structured in a similar way to the S&P 500 Low Volatility index method. The portfolios rebalancing period were quarterly and the eligible assets for the portfolios were IBOVESPA components in each analyzed period. The portfolios performance was evaluated through indicators such return, standard deviation, Sharpe ratio, maximum drawdown and MVAR indicators. The results point to the importance in choosing the weight limits for the assets of minimum-variance portfolios. Lower risk portfolios delivered the best results in all tested indicators.

Keywords: Minimum-variance portfolio. Low volatility. Portfolio optimization. Covariance matrix. Performance measurement.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Comparativo de rentabilidade acumulada	31
Gráfico 2 - <i>Maximum drawdown</i>	33
Gráfico 3 - Comparativo da rentabilidade acumulada em 2009Q1 e 2009Q2	36
Gráfico 4 - Comparativo da rentabilidade acumulada em 2008Q3.....	37

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resumo dos resultados.....	29
Tabela 2 – Estatísticas das carteiras vs. IBOV.....	30
Tabela 3 - MVaR diário e <i>maximum drawdown</i>	32
Tabela 4 - Estatísticas descritivas	34
Tabela 5 - Dados comparativos por ano	46
Tabela 6 – Dados comparativos por quadrimestre.....	47
Tabela 7 – Resultados para as restrições de pesos dos ativos na carteira CMVL.....	51
Tabela 8 – Resultados para as restrições de pesos dos ativos na carteira CMVA ...	51
Tabela 9 - Resultados para os percentuais de ativos na carteira CBV	52

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
2 REVISÃO DE LITERATURA	12
3 METODOLOGIA E DADOS	17
3.1 OTIMIZAÇÃO POR MÍNIMA VARIÂNCIA	18
3.1.1 Métodos de estimação da matriz de covariância	20
3.1.1.1 Matriz de covariância amostral.....	21
3.1.1.2 Matriz de covariância pelo método de encolhimento.....	22
3.2 CARTEIRA DE BAIXA VOLATILIDADE	23
3.3 CARTEIRA IGUALMENTE PONDERADA	24
3.4 MEDIDAS DE AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DAS CARTEIRAS.....	25
3.4.1 Retorno das carteiras	25
3.4.2 Volatilidade	26
3.4.3 Índice de Sharpe	26
3.4.4 Modified Value at Risk	27
3.4.5 Maximum Drawdown	27
4 ANÁLISE DOS RESULTADOS	29
4.1 ANÁLISE POR PERÍODOS.....	34
4.2 RESTRIÇÕES DE PESOS E QUANTIDADE DE ATIVOS.....	37
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
REFERÊNCIAS	42
APÊNDICE A – DADOS COMPARATIVOS POR ANO	46
APÊNDICE B – DADOS COMPARATIVOS POR QUADRIMESTRE	47
APÊNDICE C – RESTRIÇÕES DE PESOS DOS ATIVOS	51
APÊNDICE D – PERCENTUAL DE AÇÕES NA CARTEIRA CBV	52

1 INTRODUÇÃO

Um dos maiores axiomas da teoria financeira sugere que os investidores devem aceitar maior risco para obter melhores rentabilidades. Desde o trabalho pioneiro de Markowitz (1952), o conceito da fronteira eficiente vem sendo discutido, quando se estabeleceu os padrões para o que é conhecida como a Moderna Teoria dos Portfólios. O autor introduziu o conceito de média variância e diversificação de portfólio através da construção de carteiras eficientes com minimização de risco. As carteiras eficientes são combinações de ativos com o menor nível de risco esperado para determinado nível de retorno esperado, ou o maior retorno para dado nível de risco.

Estendendo o trabalho de Markowitz, Sharpe (1964) criou o modelo *Capital Asset Price Model* (CAPM). O modelo pressupõe que o retorno esperado de uma ação é linearmente proporcional ao risco de mercado (β). Para implementar estas estratégias, há a necessidade de estimar tanto o risco como o retorno esperado. Entretanto, conforme Clarke, De Silva e Thorley (2006, p.10) salientam, estimar estes retornos é um dos principais problemas enfrentados na prática:

One hurdle to practical implementation of the Markowitz prescription is the estimation of expected security returns. Financial economists usually assume information efficiency and employ some equilibrium model of risk premiums, while active quantitative portfolio managers assume inefficiently priced securities and search for data or signals that predict returns. Both find that numerical optimizers provide security weights that seem overly sensitive to small perturbations in the forecasted security returns.

Porém, contrariando estas bases teóricas do modelo CAPM, Haugen e Heins (1975) constatam que ações de baixa volatilidade produzem retornos maiores que seus pares mais arriscados. Na mesma linha, Fama e French (1992) documentam que a relação entre o retorno das ações no mercado americano e o β de mercado foi neutra entre 1963 e 1990. As evidências destes importantes autores impulsionaram os estudos sobre carteiras de mínima variância, as quais não dependem da estimação de retornos e têm menor risco que as carteiras de média variância baseadas nas abordagens de Markowitz e Sharpe. Com isso, surgiram indícios de que as ações e carteiras com menor risco tendem a apresentar maiores retornos, o que foi chamado de “efeito volatilidade”, podendo ser destacado os estudos de Black (1993), Falkenstein (1994) e Haugen e Baker (1991).

Logo, considerando que os investidores são avessos ao risco (KAHNEMAN E TVERSKY, 1979), essas descobertas sobre a volatilidade têm um grande impacto na postura de investimentos. Dentro da abordagem de construção de carteiras, estratégias de investimentos de mínima variância e controle de volatilidade atraíram a atenção dos acadêmicos nos últimos anos. (CLARKE; DE SILVA; THORLEY, 2006; BLITZ; VAN VLIET, 2007; DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009). Conforme mencionado anteriormente, a estratégia de mínima variância, ao contrário da média variância, não requer previsões de retorno dos ativos e, por isso, muitas vezes ela pode ser mais eficiente que a estratégia que faz o *trade-off* entre risco e retorno esperados. Os estudos mais recentes e relevantes sobre as carteiras de mínima variância para o Brasil e o mundo são detalhados no capítulo de revisão bibliográfica.

Neste sentido, o objetivo geral deste trabalho é analisar o desempenho das carteiras de mínima variância e baixa volatilidade no mercado de ações brasileiro¹. Para tanto, utiliza-se abordagem semelhante aos estudos de Thomé Neto, Leal e Almeida (2011) e Rubesam e Beltrame (2013), porém com importantes diferenças. Primeiramente, este estudo é feito com rebalanceamentos quadrimestrais das carteiras, diferente daqueles autores que testam períodos diários, semanais, mensais e até trimestrais. Esta opção é tomada seguindo o padrão do índice IBOVESPA (IBOV), buscando promover uma comparação mais justa com o índice, que é utilizado como *benchmark*, não permitindo que a composição das carteiras seja alterada enquanto a composição do IBOV não for alterada. Outra importante diferença neste estudo é a construção de uma carteira de baixa volatilidade alternativa às conhecidas carteiras de mínima variância. Esta carteira de baixa volatilidade tem metodologia de formação que se assemelha aos índices *S&P Low Volatility* da empresa *S&P Dow Jones Indices*, e ao método utilizado por Blitz e Van Vliet (2007). Este método é inédito em estudos realizados no Brasil e, acredita-se que, apesar da simplicidade da carteira, esta seja a maior contribuição deste trabalho.

Além da carteira de baixa volatilidade, são construídas carteiras de mínima variância, otimizadas utilizando a matriz de covariância amostral e a matriz de

¹ A denominação “mínima variância” foi utilizada para definir as duas carteiras construídas e otimizadas para atingir a menor variância possível, enquanto a denominação “baixa volatilidade” foi utilizada para descrever a carteira de baixo risco construída com base no índice *S&P500 Low Volatility*.

covariância pelo método *shrinkage* proposto por Ledoit e Wolf (2003). Ademais, buscou-se contemplar no estudo, a imposição de restrição de peso aos ativos das carteiras de mínima variância, por ser um tema muito discutido depois do artigo apresentado por Jagannathan e Ma (2003). Desta forma, este trabalho tem como objetivos específicos:

- a) construir carteiras de mínima variância e baixa volatilidade;
- b) verificar a importância da restrição dos pesos dos ativos nas carteiras;
- c) comparar o risco e o retorno das carteiras com o índice de mercado;
- d) analisar os indicadores de performance das carteiras.

Para tanto, no capítulo seguinte realiza-se uma revisão dos principais estudos sobre carteiras de mínima variância, tanto no Brasil quanto no resto do mundo. No capítulo 3, descrevem-se os dados e *software* utilizados no estudo, bem como as diferentes abordagens para estimação da matriz de covariância. Além disso, apresenta-se o processo de otimização das carteiras de mínima variância e os métodos para construção e análise da performance das carteiras. O quarto capítulo apresenta os resultados e a comparação do desempenho das carteiras. Por fim, no último capítulo manifestam-se as considerações finais do estudo.

2 REVISÃO DE LITERATURA

O trabalho pioneiro de Markowitz (1952) estabelece aos investidores um conceito fundamental de *trade-off* entre risco e retorno esperados. Desde então, este conceito é debatido pelos estudiosos da volatilidade em séries financeiras, com aplicações nos mercados de opções, análise de risco e formação de carteiras. Neste último caso, pode-se destacar os estudos sobre carteiras de mínima variância, que buscam estabelecer portfólios com a menor variância possível, independente da estimativa de retornos dos componentes da carteira.

Entre esses estudos, Haugen e Baker (1991) analisam dados dos Estados Unidos para mostrar que a carteira de mercado não é um investimento eficiente, e a comparam com uma carteira de baixa volatilidade. O estudo compreende os anos de 1972 a 1989 e as mil maiores ações do mercado americano pelo critério de capitalização de mercado. Os autores impõem algumas restrições a fim de buscar a diversificação, como uma restrição de peso máximo por ativo e por setor. Os resultados do estudo mostram que a carteira de mínima variância apresenta menor risco e retornos superiores à carteira de mercado. Outro fato notável, encontrado também por estes autores e, posteriormente, por Ang et al. (2006), é que as carteiras de mínima variância apresentam menor volatilidade conforme o esperado, mas sem comprometer o retorno realizado, que na média é maior que a carteira de mercado.

De forma semelhante, Clarke, De Silva e Thorley (2006) propõem a construção de carteiras de mínima variância para ações dos Estados Unidos, porém com dados de janeiro de 1968 a dezembro de 2005, com restrição a posições vendidas. O estudo é similar ao de Haugen e Baker (1991), mas abrange um maior período e utiliza técnicas mais avançadas de estruturação da matriz de covariância. Neste caso, a matriz de covariância é estimada inicialmente pelo processo amostral. Para contornar problemas de estimação, reestrutura-se a matriz de covariância utilizando um processo de componente principal sugerido por Connor e Korajczyk (1988), e alternativamente o processo de *shrinkage* proposto por Ledoit e Wolf (2003). O estudo conclui que os processos de otimização de carteira funcionam bem, a volatilidade é persistente e de certa forma previsível.

Em outro trabalho, Blitz e Van Vliet (2007) evidenciaram que as ações com menor volatilidade geram retornos maiores que as ações mais arriscadas,

comportamento chamado de “efeito volatilidade”². A composição das carteiras segue uma metodologia simples, com pesos iguais para os ativos segmentados em decil percentual. Os 10% dos ativos menos voláteis nos últimos três anos compõem carteira no mês seguinte. Essas carteiras são comparadas com a carteira de mercado, além de carteiras ponderadas por *valuation*, *momentum* e tamanho de mercado. Uma diferença importante entre este estudo em relação ao anterior está associada à construção de carteiras baseadas no ranking direto de volatilidade dos ativos. Para tanto, utilizam o decil das ações menos arriscadas para formar a carteira de menor volatilidade. Baseados nesta construção, eles constatam que o efeito volatilidade não pode ser explicado pelos conhecidos efeitos de tamanho e de valor das empresas.

Um estudo comparativo ainda mais completo é desenvolvido por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), no qual analisam quatorze diferentes abordagens de otimização de alocação de ativos e compararam a uma simples abordagem de pesos iguais para os ativos. Os autores constatam que nenhuma das quatorze abordagens entrega um índice de Sharpe maior que a ingênua estratégia de pesos iguais. Muito se atribui a este resultado o fato de que as técnicas de otimização são sensíveis aos erros de estimação.

Por outro lado, Kritzman, Page e Turkington (2010) analisam esse estudo de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) e criticam alguns pontos dessa abordagem, como o curto período de análise dos retornos (60 períodos) para a estimativa do retorno futuro. Em verdade, eles acabam encontrando um resultado oposto ao verificado por aqueles autores. Usando simples estimativas de retorno e volatilidade para a construção da matriz de covariância, eles afirmam que os portfólios otimizados geram retornos fora da amostra maiores que a abordagem de pesos iguais.

Além destes trabalhos, outros importantes autores apresentam trabalhos relevantes na área. É o caso de Jagannathan e Ma (2003), que analisam portfólios de mínima variância. De acordo com os autores, normalmente são restringidas as posições vendidas nas carteiras e utilizados limites máximos no peso de cada ativo no portfólio. Eles concluem que ao impor estas restrições, não permitindo posições vendidas e limitando o peso dos ativos, as carteiras são beneficiadas.

² Os autores analisam dados do período de dezembro de 1985 a janeiro de 2006 de aproximadamente duas mil ações que compõem o índice FTSE *World Development*.

Com um estudo mais recente, Blitz, Pang e Van Vliet (2013) pesquisam a relação entre risco e retorno nos mercados de ações emergentes e encontram que essa relação é neutra ou até mesmo negativa, contrariando as teorias tradicionais como o CAPM, que prevê uma relação positiva entre risco e retorno. Isto reafirma os importantes estudos de Black, Jensen e Scholes (1972), Blitz e Van Vliet (2007), Fama e MacBeth (1973) e Haugen e Heins (1975).

Por fim, Ang et al. (2006) investigam como a volatilidade estocástica é precificada no retorno futuro das ações. Os autores concluem que as ações que apresentam risco idiossincrático muito alto, tendem a apresentar retorno médio inferior às ações menos arriscadas. Esta constatação vai ao encontro dos estudos de Clarke, De Silva e Thorley (2006) e Haugen e Baker (1991), salientando que as ações com maior risco específico produzem baixos retornos médios.

No Brasil, estudos semelhantes são desenvolvidos. Thomé Neto, Leal e Almeida (2011) verificam se uma carteira de mínima variância global produz resultados superiores ao IBOV e Fundos de Investimentos em Ações. O período analisado vai de janeiro de 1998 a dezembro de 2008. As ações utilizadas são as que compõem o IBOV no período da análise. Não permite-se posições vendidas nas carteiras formadas e os autores testam diferentes restrições de pesos para os ativos. A matriz de covariância é estimada pela forma clássica (amostral) e também pelo método sugerido por Leal e Mendes (2005) através de um estimador *Minimum Covariance Determinant* (MCD) de Rousseeuw (1984). Os autores concluem que a carteira de mínima variância global apresenta resultados médios superiores e desvio-padrão inferior ao IBOV. Apesar disto, os autores constatam que uma carteira mais simples com ponderação igual entre os ativos obtém retornos similares à carteira de mínima variância estudada. O trabalho indica também que a imposição de limites no peso e na quantidade dos ativos apresenta vantagens para a alocação dos ativos na carteira.

Outro estudo desenvolvido por Santos e Tessari (2012) verifica o desempenho de estratégias de otimização por média variância e mínima variância, comparados ao IBOV e uma carteira igualmente ponderada. O estudo compreende o período de março de 2009 a novembro de 2011, utilizando 45 ativos que faziam parte do IBOV tanto no início quanto no final do período analisado. A matriz de covariância é estimada através de cinco diferentes abordagens: matriz amostral, matriz *RiskMetrics* e pelo método de *shrinkage* através de três estimadores

propostos por Ledoit e Wolf (2003, 2004a, 2004b). Os autores concluem que as carteiras otimizadas por média variância e mínima variância apresentam desempenho superior aos *benchmarks* propostos, independente da forma como a matriz de covariância tenha sido estimada. Este trabalho de Santos e Tessari (2012) difere em alguns aspectos do estudo de Thomé Neto, Leal e Almeida (2011), o que pode explicar a divergência nos resultados obtidos. De acordo com os autores, uma das diferenças deste estudo é a não imposição de restrição de pesos para os ativos, tornando a carteira mais flexível. O estudo compreende um período diferente e, além disso, são utilizadas mais alternativas de estimadores para a matriz de covariância. Por fim, o algoritmo utilizado para resolver o problema de otimização é diferente da ferramenta aplicada pelos outros autores.

Seguindo a mesma linha de pesquisa, Rubesam e Beltrame (2013) realizam um estudo de carteiras de variância mínima (CVM) de ações na bolsa brasileira. O trabalho é semelhante ao de Thomé Neto, Leal e Almeida (2011) e de Santos e Tessari (2012), porém os autores fazem os testes com uma quantidade maior de ações do que os estudos anteriores. O período do estudo é de junho de 1998 a junho de 2011, utilizando inicialmente todas as ações negociadas na janela de tempo estudada e que atenderam alguns critérios dos autores.

A matriz de covariância utilizada nas CVM é estimada pelos autores através de diferentes métodos. O mais simples é através da matriz de covariância amostral. Testa-se ainda, outros três diferentes modelos para estimar a matriz de covariância. Um deles é através do processo de *shrinkage* semelhante ao usado por Santos e Tessari (2012). O outro método utilizado é a ponderação exponencial ou EWMA (*Exponentially-Weighted Moving Average*). Este método pondera exponencialmente dando maior peso para os dados mais recentes. Para isso, o método incorpora um parâmetro de decaimento das ponderações, e este parâmetro é meramente arbitrário. Por fim, é utilizado o método DCC-GARCH multivariado.

Além das CVM, os autores constroem uma carteira que maximiza a razão de Sharpe (CRS). Teoricamente, esta carteira produz o melhor retorno ajustado à volatilidade. Também elabora-se uma carteira que maximiza a média geométrica dos retornos (CMG). (Ver, por exemplo, CHRISTENSEN, 2005). Por fim, os autores criam uma simples carteira igualmente ponderada (CIP). Para todas essas abordagens, é utilizada uma restrição de posição vendida que depois é liberada,

permitindo carteiras 130/30. Além desta, é testada uma restrição para o peso máximo de cada ativo nas carteiras.

Os resultados são comparados ao IBOV e aos outros *benchmarks* de otimização (CRS, CMG e CIP), e indicam que o desempenho das CVM é melhor e estatisticamente significativa. O estudo aponta que os métodos mais simples de estimação da matriz de covariância produzem os melhores resultados. Outra constatação é que as carteiras que utilizam as médias históricas de retorno no processo de otimização produzem resultados ruins fora da amostra.

Além desses estudos que investigam a construção de carteiras de mínima variância, muitas pesquisas são desenvolvidas para analisar o comportamento da volatilidade em séries financeiras. Alguns autores modelam a volatilidade de índices de ações no Brasil, e destacam-se Da Silva e Da Silva (2013), Jubert et al. (2009), Medeiros (2012), e Mól, Dos Santos Felipe e Júnior (2014), onde todos verificam características de assimetria e persistência da volatilidade.

Por fim, este capítulo busca descrever os principais estudos sobre carteiras de mínima variância, identificando em linhas gerais, que as carteiras de menor risco tendem a ser uma boa opção de investimento. No próximo capítulo apresentam-se os dados e metodologia utilizados no trabalho.

3 METODOLOGIA E DADOS

Utilizou-se neste estudo dados de retorno diário do IBOV e das ações que compuseram o índice no período de janeiro de 2003 até dezembro de 2013. A composição de cada quadrimestre da carteira teórica do IBOV foi obtida através do sistema de recuperação de informações da BM&FBovespa. As informações sobre retorno do IBOV e dos ativos foram obtidas na base da Economatica. As informações referentes a mudanças de códigos, fusões, aquisições e cancelamento de ativos listados foram coletadas através do sistema de notícias Bloomberg. Além disso, foram utilizados os dados de retorno do CDI diário para o cálculo do índice de Sharpe das carteiras. Os ativos lançados na bolsa e que entraram no IBOV antes de um ano de negociações não foram utilizados para o cálculo da matriz de covariância e tampouco para a formação da carteira de baixa volatilidade, por não haver dados suficientes para a estimação. Assim que estes ativos completaram um ano de existência (e se mantiveram no IBOV), foram disponibilizados para utilização nas carteiras.

Todos os cálculos necessários para a formação das carteiras foram realizados no *software* livre *R* (TEAM, 2014), através do ambiente integrado de desenvolvimento RStudio. (RSTUDIO, 2014). No ambiente do *software*, além das funções disponíveis no pacote base, foram utilizados diferentes pacotes para os cálculos e estimações. O pacote *xts* (RYAN; ULRICH, 2014) foi necessário para a formatação dos dados para o estilo “série de tempo”. Para estimar a matriz de covariância pelos métodos utilizados, foi usado o pacote *tawny* (ROWE, 2014), e a otimização quadrática das carteiras de mínima variância foi feita através do pacote *quadprog* (TURLACH; WEINGESSEL, 2013). Todas as estatísticas das carteiras construídas, bem como os gráficos gerados, foram possíveis através do pacote *PerformanceAnalytics* (PETERSON; CARL, 2014).

Desta forma, foram construídas quatro diferentes carteiras quadrimestrais: (i) carteira com pesos igualmente ponderados; (ii) carteira de mínima variância através da matriz de correlação pelo método de encolhimento (*shrinkage*) (CMVL) com restrição de pesos de 8% para os ativos; (iii) carteira de mínima variância através da matriz de correlação amostral (CMVA) com restrição de pesos de 6% para os ativos; (iv) carteira de baixa volatilidade calculada com 17% de ativos menos voláteis do total da carteira IBOV.

Para a estimação da matriz de covariância, tanto pelo método de encolhimento como pelo método amostral, foi utilizado um processo semelhante ao que Clarke, De Silva e Thorley (2006) realizaram para dados diários, através de janelas móveis. No início de cada quadrimestre, iniciando em janeiro de 2003, a matriz de covariância dos ativos que compõem o IBOV no início do mesmo período (janeiro de 2003) foi estimada pelos dois métodos, através do histórico de retorno diário dos últimos doze meses, de janeiro de 2002 a dezembro de 2002. Com esta matriz, foi feita a otimização dos pesos dos ativos para compor as carteiras de mínima variância. O mesmo processo de janelas móveis foi realizado para a carteira de baixa volatilidade, porém sem a necessidade de estimação da matriz de covariância. As carteiras foram mantidas sem qualquer alteração por todo o quadrimestre.

No momento seguinte, o processo foi realizado para o próximo quadrimestre que se iniciou em maio de 2003, utilizando para a estimação das matrizes e carteiras o histórico de retorno das ações no período de maio de 2002 a abril de 2003. A cada quadrimestre o processo se repetiu, movendo a janela um quadrimestre à frente. Desta forma, as carteiras são estimadas para trinta e três quadrimestres fora da amostra (11 anos), e posteriormente comparadas ao IBOV, que serve como *benchmark*. A carteira CIP não passou por nenhum processo de otimização ou análise de retornos históricos e foi calculada atribuindo-se o mesmo peso para todos ativos que compuseram o IBOV no quadrimestre analisado.

3.1 OTIMIZAÇÃO POR MÍNIMA VARIÂNCIA

A otimização de carteiras é um tema bastante abordado desde os trabalhos de Markowitz (1952,1959). Nestes estudos o autor definiu o modelo de média variância para a seleção de portfólios, que posteriormente passou a ser considerada a base para a Moderna Teoria do Portfólio. Estes estudos levantaram um contraponto à ideia que perdurava na época, que consistia em concentrar os investimentos em ativos que apresentavam os maiores retornos esperados. O autor demonstrou que uma carteira diversificada poderia entregar retornos superiores ao de uma carteira concentrada. Uma das bases do modelo é que o investidor maximiza a utilidade em função do risco e retorno esperados. Isso significa dizer que o investidor é avesso ao risco, e o grau de aversão, define o prêmio de risco

esperado. Markowitz definiu como medida de risco a variância dos retornos dos ativos. Então, quanto maior a variância e quanto mais avesso ao risco é o investidor, maior deve ser o retorno esperado. Para o autor, o retorno esperado é uma variável aleatória com distribuição normal.

Assim, a otimização de carteira por média variância sugerida por Markowitz passa pela solução do seguinte problema

$$\min_w w' \hat{\Sigma} w - \frac{1}{\gamma} \hat{\mu}' w \quad (1)$$

$$\sum_i w_i = 1$$

onde $w \in \mathbb{R}^N$ são os vetores de pesos dos ativos na carteira, $\hat{\mu}' w$ é a média amostral dos excessos de retornos da carteira, $w' \hat{\Sigma} w$ é a variância amostral dos retornos da carteira e γ é o parâmetro de aversão ao risco. A restrição $\sum_i w_i = 1$ garante que a soma dos pesos atinja 100%, significando investimento total da carteira. Um requisito adicional normalmente utilizado é a impossibilidade de posições vendidas e um limite máximo y de peso para as ações, o que acrescenta a seguinte restrição ao problema de otimização

$$\forall i : 0 \leq w_i \leq y$$

Um dos problemas que podem surgir na abordagem de média variância é a ocorrência de erros na estimação dos retornos dos ativos. Sabe-se que a estimação de retornos tem um grau de dificuldade maior que a estimação da covariância dos ativos (ver, por exemplo, MERTON, 1980) e pequenos erros na estimação dos retornos podem causar grande impacto nos pesos dos ativos na carteira de média variância. Entretanto, a carteira de mínima variância tem a propriedade de ser construída independente de qualquer estimação de retorno dos ativos. O objetivo das carteiras de média variância é minimizar o risco para dado retorno, enquanto a carteira de mínima variância tem a função de minimizar o risco independente do retorno esperado. (CLARKE; DE SILVA; THORLEY, 2006).

Apesar desta abordagem não seguir a função utilidade do investidor compreendida na teoria de Markowitz, pode ser considerada como um caso especial

da Equação 1, com um coeficiente de aversão ao risco infinito e prêmio de risco zero. Neste caso, é ignorado o retorno esperado, e compreende-se o problema de otimização como

$$\begin{aligned} & \min_w w' \hat{\Sigma} w & (2) \\ & \text{sujeito a } \sum_i w_i = 1 \\ & \forall i : 0 \leq w_i \leq y \end{aligned}$$

Conforme comentado anteriormente, não há necessidade de estimar os retornos dos ativos, assim o foco passa à estimação da matriz de covariância e à otimização dos pesos dos ativos para formar a carteira de mínima variância.

3.1.1 Métodos de estimação da matriz de covariância

Com o objetivo de construir a carteira de mínima variância, a matriz de covariância deve ser estimada utilizando as informações disponíveis no período anterior. Existem inúmeros métodos de estimação da matriz de covariância e, neste estudo, são utilizados o método de matriz amostral e o método de *shrinkage* proposto por Ledoit e Wolf (2003). A utilização da matriz amostral é muito criticada no meio acadêmico, por sofrer alguns problemas, por exemplo, quando a quantidade de ativos é maior que o período amostral. (Ver, por exemplo, DEMIGUEL et al., 2009; CLARKE; DE SILVA; THORLEY, 2006; LEDOIT; WOLF, 2004b). Como, em média, este trabalho utiliza 62 ativos, não passando de 73 ativos e o período por amostra é em média 250 dias, não espera-se este problema comum citado pelos autores.

Enquanto existem técnicas mais sofisticadas de estimação da matriz de covariância como, por exemplo, a modelagem GARCH, decidiu-se utilizar o histórico da amostra de dados para que as principais conclusões sejam de fácil replicação. Outro motivo para a não utilização de modelagem GARCH aparece na periodicidade das carteiras: a composição não muda durante um quadrimestre ou em média, aproximadamente 82 dias. Isso significaria estimar a volatilidade pelos modelos GARCH para 82 períodos para frente, o que poderia gerar muitos erros na estimação; ou alternativamente calcular a volatilidade somente para o primeiro dia

da carteira, o que tornaria a carteira muito próxima dos outros métodos utilizados no trabalho.

3.1.1.1 Matriz de covariância amostral

Apesar do método de estimação amostral ser pouco usado, pois impõe pouca estrutura à matriz de covariância, selecionou-se este método pela facilidade computacional e para efeito de comparação com o método *shrinkage*. Se a quantidade de ativos N assume o mesmo tamanho da série histórica de retornos T , o número total de parâmetros para se estimar é muito grande. Quando $N \geq T$, a matriz de covariância amostral passa a ser singular (não inversível).³

Assumindo X como uma matriz $N \times T$, e que os retornos dos ativos são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), a matriz de covariância amostral é definida por

$$S = \frac{1}{T} X \left(I - \frac{1}{T} \mathbf{1}\mathbf{1}' \right) X' \quad (3)$$

onde $\mathbf{1}$ são vetores de “uns” e I é a matriz de identidade. A Equação 3 mostra porque a matriz de covariância amostral não é inversível quando $N \geq T$ ⁴. Chamamos de s_{ij} as entradas de S .

Este problema na estimação ofusca algumas - supostas - boas propriedades da matriz de covariância amostral, como a máxima verossimilhança sobre condições de normalidade da distribuição. Isso significa dizer que é muito provável que os parâmetros estimados sejam semelhantes aos dados que serviram como base. Isto pode ser um problema se a amostra não for muito grande, levando a erros de estimação devido à pequena quantidade de dados avaliada, ou seja, se T não for maior que N . No caso específico deste estudo, todos os períodos analisados apresentam $T > N$, então espera-se que a matriz amostral não reflita tantos erros na estimação.

³ Os pesos ótimos para os ativos da carteira dependem da matriz de covariância amostral invertida.

⁴ O ordenamento de S é no máximo igual ao ordenamento da matriz $I - \mathbf{1}\mathbf{1}'/T$, que é $T - 1$. Desta forma, quando $N > (T - 1)$ o ordenamento da matriz fica deficitário, não sendo possível, por exemplo, estimar a matriz de covariância irrestrita.

3.1.1.2 Matriz de covariância pelo método de encolhimento

Os possíveis problemas resultantes da matriz amostral podem ser amenizados impondo alguma estrutura ao estimador. Para isso, Ledoit e Wolf (2003) propõem a utilização da média ponderada entre a matriz de covariância amostral e a matriz de covariância gerada pelo conhecido modelo de único fator de Sharpe (1963). Este modelo de único fator é dado pelo retorno x dos ativos i no período t

$$x_{it} = \alpha_i + \beta_i x_{0t} + \varepsilon_{it} \quad (4)$$

onde se considera não correlacionados o retorno de mercado x_{0t} e os resíduos ε_{it} . Assume-se também que a variância dos ativos é constante. Logo, $Var(\varepsilon_{it}) = \delta_{ii}$. Desta forma, a matriz de covariância subjacente ao modelo é dada por

$$\Phi = \sigma_{00}^2 b b' + \Delta \quad (5)$$

onde σ_{00}^2 é a variância dos retornos de mercado x_{0t} , b é o vetor de inclinações β da regressão e Δ é a matriz diagonal das variâncias dos resíduos δ_{ii} . Denota-se ϕ_{ij} as entradas de Φ . Sendo assim, Ledoit e Wolf (2003) expõem que a matriz de covariância dos retornos das ações x_{it} gerada pelo modelo de único fator de Sharpe (1963), rodando uma regressão dos retornos das ações, é dada por

$$F = s_{00}^2 \vartheta \vartheta' + D \quad (6)$$

onde s_{00}^2 é a variância amostral dos retornos de mercado x_{0t} , ϑ é o vetor de inclinações β da regressão e D é a matriz diagonal das variâncias residuais amostrais. Caracteriza-se f_{ij} as entradas de F .

Alguns autores que abordaram a covariância documentaram problemas opostos: Jobson e Korkie (1980) verificaram que a performance da matriz de covariância amostral é ruim; por outro lado, Rosenberg (1974) discutiu a importância da matriz de covariância estimada além do fator de mercado, ou modelo de único

fator, por exemplo. Com isso, Ledoit e Wolf (2003, p. 607) resumem o problema da seguinte forma:

At one extreme, the single-index covariance matrix comes from a one-factor model, while at the other extreme, the sample covariance matrix can be interpreted as an N-factor model (each stock being a factor, there are no residuals). The intuition of the profession has always been that the best model lies somewhere between these two extremes.

Assim, o estimador de encolhimento da matriz de covariância dos retornos das ações sugerido pelos autores é a média ponderada entre a matriz de covariância amostral e a matriz de covariância gerada pelo modelo de único fator

$$\hat{S} = \frac{k}{T} \mathbf{F} + \left(1 - \frac{k}{T}\right) \mathbf{S} \quad (7)$$

O parâmetro k mede a intensidade de encolhimento para a amostra T e precisa ser estimado, pois depende de variáveis não observáveis. O cálculo de k é dado por

$$k = \frac{(\pi - \rho)}{\gamma} \quad (8)$$

onde π é a soma das variâncias assintóticas de $\sqrt{T}s_{ij}$, ρ é a soma das covariâncias assintóticas de $[\sqrt{T}f_{ij}, \sqrt{T}s_{ij}]$. Por fim, γ é a medida do erro de especificação do modelo de único fator, definido pela soma de $(\phi_{ij} - \sigma_{ij})^2$.

3.2 CARTEIRA DE BAIXA VOLATILIDADE

As carteiras de mínima variância exigem a utilização de *softwares* estatísticos para a estimação, tornando a implementação pouco prática para pequenos investidores. Para contornar este problema, propõe-se a construção de uma carteira de baixa volatilidade (CBV) baseada na metodologia aplicada nos índices *S&P Low Volatility*, da empresa *S&P Dow Jones Indices*, que se auto afirma ser “a maior fonte mundial de conceitos baseados em índices, dados e pesquisa”. Os índices de baixa volatilidade da *S&P* medem o desempenho das ações menos voláteis do índice

benchmark. Este método se assemelha ao desenvolvido por Blitz e Van Vliet (2007), com algumas alterações no tamanho da amostra, quantidade e ponderação dos ativos.

A volatilidade é definida como sendo o desvio padrão anualizado dos retornos das ações do IBOV nos últimos doze meses anteriores ao rebalanceamento da carteira. Após isso, os ativos são classificados por ordem decrescente baseado no inverso da volatilidade. Assim, os ativos com menor volatilidade são os melhores classificados e, portanto, integram a carteira de baixa volatilidade. Nos índices *S&P Low Volatility* é utilizada uma quantidade fixa destes ativos menos voláteis, pois os índices base são constituídos também por uma quantidade fixa. No caso brasileiro, o IBOV apresenta poucos ativos se comparado, por exemplo, ao índice americano, e varia a cada rebalanceamento, não tendo uma quantidade fixa.

Devido a esta particularidade do IBOV, realizou-se um ajuste na quantidade de ativos que foram selecionados para a CBV, utilizando um percentual fixo (17%) do total de ações a cada período analisado. A ponderação dos pesos da carteira CBV foi realizada a cada quadrimestre da seguinte forma

$$w_i = \frac{\frac{1}{\sigma_{anual_i}}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{anual_i}}} \quad (9)$$

onde w_i é o peso de cada ativo e σ_{anual_i} é o desvio padrão anualizado dos ativos.

3.3 CARTEIRA IGUALMENTE PONDERADA

Na grande maioria dos trabalhos sobre carteiras de mínima variância (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009, KRITZMAN; PAGE; TURKINGTON, 2010, THOMÉ NETO; LEAL; ALMEIDA, 2011, SANTOS; TESSARI, 2012, RUBESAM; BELTRAME, 2013, entre outros) é utilizada a carteira igualmente ponderada pela sua facilidade de construção e para servir como um *benchmark* alternativo aos índices de mercado. Em algumas pesquisas, esta carteira apresentou desempenho superior ao mercado e até mesmo às carteiras otimizadas.

Neste estudo, a CIP foi constituída com base nos ativos do IBOV do quadrimestre analisado. Os pesos da CIP, para N ações, são dados por

$$\forall i : w_i = \frac{1}{N} \quad (10)$$

3.4 MEDIDAS DE AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DAS CARTEIRAS

A análise das carteiras construídas foi feita através de indicadores amplamente utilizados no mercado financeiro e nos estudos da área. Para este propósito, utilizou-se medidas de retorno dos ativos, volatilidade, índice de Sharpe, *Value at Risk* (VaR) e *maximum drawdown*. Os indicadores de retorno e índice de Sharpe são considerados melhores quando maior for seu valor, enquanto a medida de volatilidade é considerada melhor quanto menor for o valor. As medidas de VaR e *maximum drawdown* geram valores negativos, então quanto menor o valor em módulo, melhor.

3.4.1 Retorno das carteiras

Ao comparar as carteiras por um longo período, é mais prático utilizar valores padronizados na análise. O retorno anualizado é o indicador mais utilizado pelos praticantes do mercado, e também amplamente usado no meio acadêmico. O retorno composto anualizado é calculado da seguinte forma

$$RA_t = \left(\prod_{i=1}^T (1 + R_i) \right)^{f/T} - 1 \quad (11)$$

onde R_i é o retorno da carteira no período i e f é o número de períodos T em um ano. O retorno R_i é dado por

$$R_i = \sum_{x=1}^n w_x x_i \quad (12)$$

sendo x_i o retorno do ativo x no período i .

3.4.2 Volatilidade

Para a análise do risco foi utilizada a medida de desvio padrão anualizado

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})^2} \quad (13)$$

$$\sigma_{anual} = \sigma \sqrt{f} \quad (14)$$

onde R_i é o retorno da carteira no período i , \bar{R} é o retorno médio da carteira no período e σ_{anual} é o desvio padrão anualizado.

3.4.3 Índice de Sharpe

Naturalmente, assume-se que os investidores são avessos ao risco. Dado dois ativos ou carteiras com o mesmo retorno, o investidor irá preferir o de menor risco. Porém, quando as carteiras apresentam diferentes valores de retorno e risco, não é possível fazer esta comparação de maneira direta. Para isso, o Nobel William Sharpe desenvolveu uma ferramenta para resolver este problema. O índice de Sharpe calcula a relação entre risco e retorno, através do excesso de retorno em relação ao desvio padrão da carteira, determinando assim a recompensa (retorno) por unidade de risco (desvio padrão) que a carteira foi exposta. O cálculo do índice é expresso por

$$IS = \frac{(R_z - RF_z)}{\sigma_z} \quad (15)$$

$$IS_{anual} = IS \sqrt{3} \quad (16)$$

onde R_z é o retorno da carteira no período z , RF_z é o retorno do ativo livre de risco⁵ no período z e σ_z é o desvio padrão da carteira no período z . Na análise deste trabalho, assume-se que $z = quadrimestre$ e IS_{anual} é o índice de Sharpe anualizado.

⁵ O certificado de depósito interbancário (CDI) é utilizado como ativo livre de risco.

3.4.4 Modified Value at Risk

O VaR estima a pior perda potencial da carteira em situações normais de mercado, em um determinado horizonte temporal, a um determinado nível de confiança estatística. Devido à característica das carteiras (assimetria e curtose) sugerir uma distribuição não-normal, foi utilizado o cálculo do VaR modificado (MVaR) que foi proposto por Zangari (1996), que leva em conta estes valores de assimetria e curtose de distribuições não-normais. A modificação foi feita utilizando a expansão de Cornish e Fisher (1938) e é calculada por

$$MVaR = -\hat{\mu}'w - q_{\alpha}^{cf} \sqrt{w' \hat{\Sigma} w} \quad (17)$$

onde q_{α}^{cf} é a porção $(1 - \alpha)$ da distribuição, estabelecida pela expansão de Cornish-Fisher. Este quantil pode ser calculado usando a seguinte fórmula

$$q_{\alpha}^{cf} = q_{\alpha} + \frac{(q_{\alpha}^2 - 1)\hat{s}_T}{6} + \frac{(q_{\alpha}^3 - 3q_{\alpha})\hat{k}_T}{24} - \frac{(2q_{\alpha}^3 - 5q_{\alpha})\hat{s}_T^2}{36} \quad (18)$$

onde q_{α} é a porção $(1 - \alpha)$ da distribuição normal, \hat{s}_T é a assimetria no período T e \hat{k}_T é a medida de curtose no período T .

3.4.5 Maximum Drawdown

O *maximum drawdown* computa a perda máxima percentual, partindo de um ponto máximo da série até o ponto mínimo, antes que seja atingido um novo máximo. O estimador do indicador passa por todos os períodos da amostra e calcula o retorno composto R para cada período. O *maximum drawdown* será o menor valor destes retornos compostos, calculado por

$$MDD(T) = \max_{\tau \in (0, T)} \left[\max_{t \in (0, \tau)} R_t - R_{\tau} \right] \quad (19)$$

Este capítulo expôs os dados utilizados no estudo, os métodos para estimação da matriz de covariância dos ativos, assim como as variadas métricas

utilizadas para a avaliação da performance das carteiras formadas. A partir deste momento, ao referir-se sobre indicadores de retorno, risco e índice de Sharpe, assume-se a utilização na forma anualizada. A próxima seção apresenta a análise dos resultados.

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A análise dos resultados foi feita comparando os indicadores de retorno, desvio padrão e índice de Sharpe, além de métricas de perda como o MVaR e *maximum drawdown*. A análise (Tabela 1) indicou superioridade dos retornos das carteiras de mínima variância estimadas pelo método de encolhimento e amostral (CMVL e CMVA) e baixa volatilidade (CBV), se comparadas ao IBOV e à CIP. A carteira de melhor resultado foi a CBV, obtendo retorno de 23,72%, aproximadamente 57% maior que o IBOV, enquanto as carteiras CMVL e CMVA performaram 23,53% e 21,99%, respectivamente. O retorno do IBOV foi de 15,10% enquanto a CIP obteve retorno de 20,18%.

A observação do risco das carteiras CMVL e CMVA mostrou um desvio padrão de 19,75% e 20,58% respectivamente, aproximadamente 30% menores se comparados ao IBOV e à CIP, com 28,67% e 26,58% de risco. Este resultado era esperado, uma vez que as carteiras são otimizadas para apresentar o menor risco possível. A carteira CBV auferiu desvio padrão de 19,93%, apenas 0,9% superior que a CMVL e 3,1% inferior a CMVA, apesar de não passar pelo processo de otimização por mínima variância. Esse resultado demonstrou ser possível formar carteiras (CBV) com métodos mais simples e obter performance consistente, com menor risco e com facilidade de implementação.

Tabela 1 - Resumo dos resultados

INDICADOR	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
Retorno anualizado	15,10%	20,18%	23,53%	21,99%	23,72%
Desvio padrão anualizado	28,67%	26,58%	19,75%	20,58%	19,93%
IS anualizado	0,06	0,23	0,46	0,38	0,47

Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*

Considerando a análise da razão de Sharpe, ficou ainda mais evidente a superioridade das carteiras de menor risco. As carteiras de mínima variância CMVL e CMVA apresentaram índice de Sharpe de 0,46 e 0,38 respectivamente, e a carteira de baixa volatilidade CBV conquistou um índice de Sharpe de 0,47. O IBOV gerou índice de Sharpe de 0,06 e a CIP de 0,23. Para fins comparativos, o índice de Sharpe da CBV foi quase oito vezes superior ao indicador do IBOV e o dobro do

numero apresentado pela CIP. O resumo das informações de retorno, desvio padrão e índice de Sharpe anualizado foram apresentados na Tabela 1.

Além disso, as carteiras formadas apresentaram alta correlação com o IBOV, compreensível pelo fato de serem calculadas através dos ativos que compõem o índice de mercado (Tabela 2). A CIP naturalmente apresentou a maior correlação, de 0,97, pois foi composta pelos mesmos ativos do IBOV, somente com diferente ponderação. As carteiras de mínima variância CMVL e CMVA manifestaram correlações de 0,85 e 0,87 respectivamente, enquanto que a carteira de baixa volatilidade CBV teve correlação de 0,82.

Tabela 2 – Estatísticas das carteiras vs. IBOV

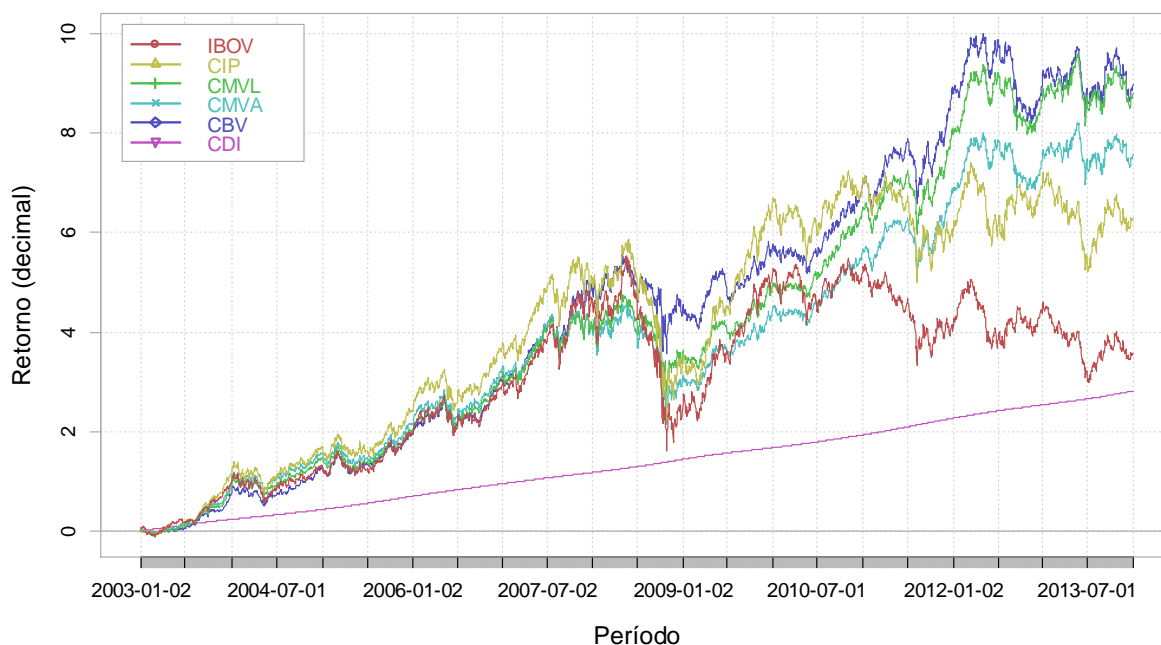
ESTATÍSTICAS	CIP	CMVL	CMVA	CBV
Beta (β)	0,90160	0,58390	0,62670	0,57030
Correlação	0,97260	0,84790	0,87310	0,82050
p-valor (correlação)	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*

Apesar da alta correlação das carteiras com o IBOV, o β das carteiras de menor risco foi baixo (Tabela 2), sugerindo um movimento em menor magnitude do que o IBOV. A CIP apresentou β de 0,90, porém as carteiras CMVL, CMVA e CBV revelaram β de 0,58, 0,63 e 0,57, respectivamente. Como pode ser verificado no Gráfico 1, as carteiras se moveram na mesma direção do IBOV na maior parte do tempo, porém em menor grandeza (com exceção ao período de 2011) devido ao baixo valor do β .

Verificando os dados de risco, retorno e β das carteiras, constata-se que os resultados não seguem a tradicional abordagem do modelo *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), onde o retorno esperado dos ativos é proporcional ao seu β ou desvio padrão, pois as carteiras com menor β e menor desvio padrão geraram um retorno superior ao índice de mercado. Essas constatações corroboram os estudos sobre a relação entre risco e retorno. (Ver, por exemplo, BLACK; JENSEN; SCHOLLES, 1972; FAMA; MACBETH, 1973; HAUGEN; HEINS, 1975; BLITZ; PANG; VAN VLIET, 2013).

Gráfico 1 - Comparativo de rentabilidade acumulada



Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*

Ademais, a carteira formada através da matriz de covariância estimada pelo método de encolhimento (CMVL) apresentou resultados ligeiramente melhores que a carteira criada através matriz de covariância amostral (CMVA). Esta superioridade corrobora estudos de estimação das matrizes de covariância (JOBSON; KORKIE, 1980, LEDOIT; WOLF, 2003, 2004a, 2004b) que explicitam a melhora que o método de encolhimento da matriz provoca na otimização de carteiras. Ledoit e Wolf (2004a, p.119) vão além e afirmam não haver mais razões para utilizar a matriz amostral:

We claim that, given the well-documented flaws of the sample covariance matrix, nobody should be using it any more now that an enhanced alternative is available. Using the simple modification we propose substantially increases the realized information ratio of the portfolio manager.

Pressupõe-se que a afirmação de Ledoit e Wolf (2004a) é válida e, com base nos resultados iniciais, a partir deste momento a análise foi feita com a carteira formada através da matriz de covariância encolhida (CMVL)⁶. Já a carteira igualmente ponderada (CIP), muitas vezes sugerida como uma alternativa de investimento simples, apresentou resultados gerais inferiores às carteiras de menor risco, contrariando o estudo de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009) amplamente

⁶ A carteira CMVA foi mantida nas tabelas e nos gráficos.

discutido e analisado no meio acadêmico. O estudo destes autores sugere que a estratégia da carteira CIP supera qualquer estratégia baseada em otimização por mínima variância, o que não foi verificado para nosso mercado no período analisado. Apesar disto, a CIP teve resultado superior ao IBOV, seguindo de perto os movimentos do índice de mercado devido à alta correlação e β , com 8 dos 11 anos de melhor retorno que o IBOV, porém apenas 3 dos 11 anos de resultados melhores que a CBV, por exemplo.

A análise do desvio padrão e índice de Sharpe permitiu comparar as carteiras em termos de risco e rentabilidade, porém não são suficientes para estimar o risco absoluto de perda da carteira. Portanto, considerou-se na análise outros indicadores utilizados no mercado financeiro, focados em estimar o risco inerente dos portfólios, buscando confirmar o menor risco das carteiras de mínima variância e baixa volatilidade. Um destes indicadores é o *Value-at-Risk* (VaR). O método histórico, normalmente utilizado para o cálculo, considera duas premissas baseadas na suposição de que as rentabilidades seguem uma distribuição normal e que os fatores de risco impactam a carteira de forma linear. Como os valores de assimetria e curtose sugerem uma distribuição não-normal, utilizou-se o método MVaR.

Os resultados basearam-se em um nível de confiança de 95% e periodicidade diária. A CMVL, por exemplo, apresentou MVaR de -1,72%, aproximadamente 34% inferior ao reportado pelo IBOV (-2,64%). Os dados estão sumarizados na Tabela 3.

Tabela 3 - MVaR diário e *maximum drawdown*

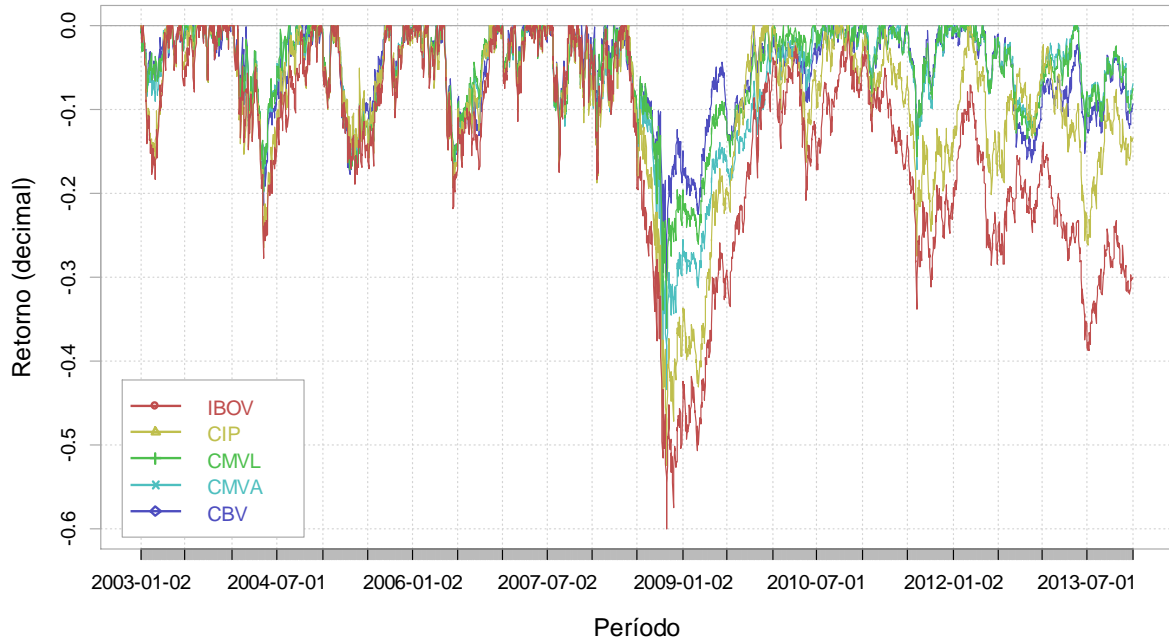
INDICADOR	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
MVaR	-2,64%	-2,39%	-1,72%	-1,78%	-1,77%
Maximum drawdown	-59,96%	-52,46%	-36,00%	-43,43%	-30,41%

Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*

Além do MVaR, foi utilizado o indicador *maximum drawdown* para medir a perda máxima das carteiras estimadas. Novamente, a carteira de mínima variância e a carteira de baixa volatilidade apresentaram resultados melhores que o IBOV (Tabela 3). A maior perda registrada pelas carteiras CMVL e CBV foi de 36% e 30,41%, respectivamente. O IBOV apresentou uma perda máxima de 59,96% do topo até o ponto mínimo, representando aproximadamente o dobro da maior perda da CBV. A CIP teve a maior perda de 52,46%. Essas perdas ocorreram no período

da crise de 2008, mais precisamente a partir do pico no dia 06 de maio de 2008 (21 de maio de 2008 para o IBOV e 02 de junho de 2008 para a CIP) chegando ao fundo no dia 27 de outubro de 2008, como pode ser visualizado no Gráfico 2.

Gráfico 2 - *Maximum drawdown*



Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*

Além do mais, ao analisar as estatísticas descritivas das séries na Tabela 4, é possível notar uma característica desejável em todas as carteiras, que é a *skewness* (assimetria) positiva. A medida indica a assimetria na distribuição dos retornos e é um indicador normalmente subestimado na análise das carteiras. No caso da assimetria positiva, a cauda do lado direito (positivo) da distribuição dos retornos é mais longa, ou tem maior peso. Isso indica que a carteira apresenta mais resultados extremos positivos do que resultados extremos negativos. A preferência dos investidores é por uma carteira com assimetria positiva, apesar de ser uma característica difícil de ser encontrada no mercado financeiro (KRAUS; LITZENBERGER, 1976).

Outro fato a ser considerado é o pior retorno apresentado pelas carteiras em um único dia (Tabela 4). O IBOV registrou um dia de retorno negativo de 11,39%, queda 52% maior que a CMVL e 70% maior que a CBV, enquanto estas carteiras apresentaram, em seus piores dias, retornos negativos de 7,49% e 6,68%,

respectivamente. A CIP teve no pior dia, retorno de -10,66%. Por outro lado, o IBOV entregou o maior retorno positivo em um dia, com 14,66%, em torno de 20% melhor que as carteiras CMVL e CBV, que obtiveram retorno diário máximo de 12,34% e 12,27% na ordem, enquanto a CIP teve no melhor dia retorno de 14,27% (Tabela 4). Estas diferenças apareceram em decorrência da maior volatilidade do índice IBOVESPA e CIP em comparação às carteiras de mínima variância e baixa volatilidade, confirmando um fato estilizado já bastante discutido em estudos acadêmicos que trata da assimetria da volatilidade. Isso significa dizer que informações negativas no mercado tem um impacto maior na volatilidade do que informações positivas, fazendo com que o resultado negativo seja maior que o resultado positivo em termos absolutos (BLACK, 1976; DA SILVA; DA SILVA, 2013; MÓL, DOS SANTOS FELIPE; JÚNIOR, 2014).

Tabela 4 - Estatísticas descritivas

ESTATÍSTICAS	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
Observações	2724	2724	2724	2724	2724
Retorno mínimo	-11,39%	-10,66%	-7,49%	-7,87%	-6,68%
Retorno médio	0,11%	0,11%	0,09%	0,08%	0,09%
Retorno máximo	14,66%	14,27%	12,34%	12,64%	12,27%
Variância	0,030%	0,030%	0,020%	0,020%	0,020%
Desvio padrão	1,81%	1,67%	1,24%	1,30%	1,26%
Assimetria	0,11	0,16	0,18	0,19	0,18
Curtose	5,56	6,01	6,60	7,40	5,45

Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*

4.1 ANÁLISE POR PERÍODOS

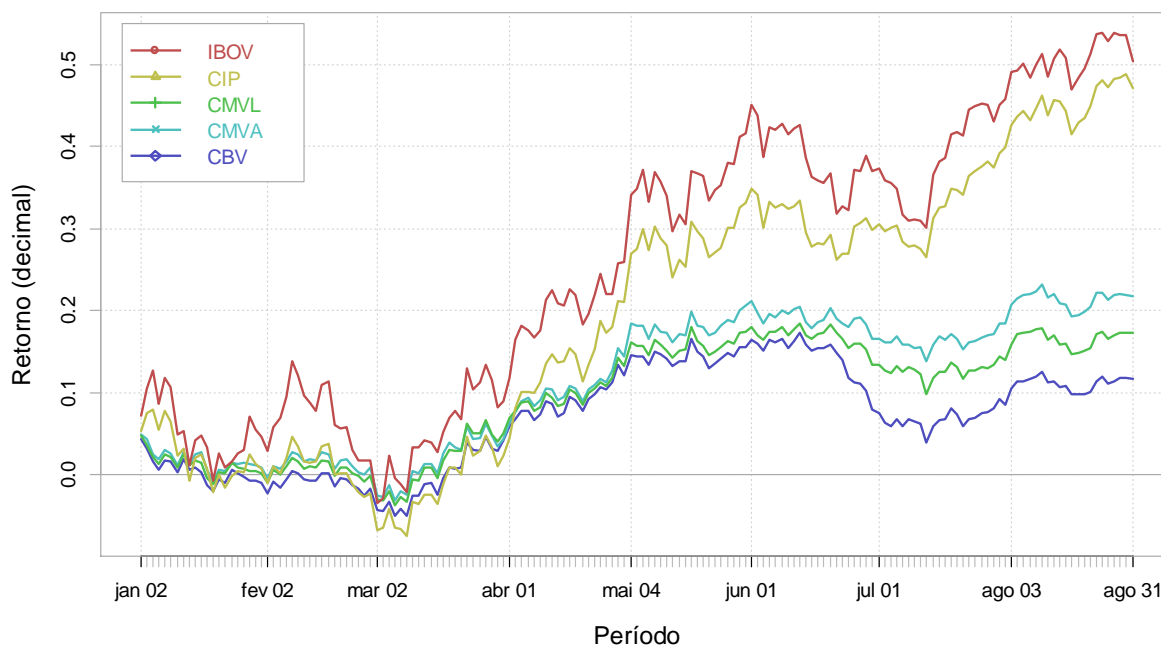
A análise da amostra por anos (Apêndice A) das carteiras CMVL e CBV apresentou retorno superior ao IBOV em 7 dos 11 anos analisados. Conforme comentando anteriormente, a CIP foi melhor que o IBOV em 8 dos 11 anos. Além disto, foi observada a superioridade dos retornos das carteiras sobre o IBOV na maior parte do tempo, confirmada pela consistência do índice de Sharpe. As carteiras CMVL e CBV apresentaram índice de Sharpe superior em 7 de 11 e em 9 de 11 anos, respectivamente, ficando ainda mais evidente a eficiência das carteiras de mínima variância e baixa volatilidade na alocação do risco. A CIP teve índice de Sharpe melhor que o IBOV em 9 dos 11 anos do estudo.

O ano de 2009 foi um dos períodos em que o IBOV e a CIP superaram com grande margem as carteiras de menor risco e apresentaram retorno excepcional de 85,36% e 81,12%, enquanto CMVL e CBV entregaram 33,66% e 25,31%, na ordem. Esse resultado do IBOV foi muito forte, a ponto de apresentar um índice de Sharpe melhor que das carteiras de mínima variância e baixa volatilidade, mesmo com praticamente o dobro de desvio padrão se comparado ao risco das carteiras de menor risco. Este período foi marcado pela rápida recuperação do mercado após a crise de 2008, fazendo com que os ativos apresentassem muita volatilidade. Neste caso, os ativos que elevaram o patamar do índice ficaram de fora das carteiras de menor risco, fazendo com que o retorno destas fosse inferior ao mercado.

Da mesma forma, ao investigarmos os dados pelo período de rebalanceamento das carteiras, que ocorre a cada quadrimestre (Apêndice B), a CBV continuou apresentando retornos superiores na maior parte dos períodos (20 dos 33 quadrimestres da amostra) e melhor índice de Sharpe em 18 dos 33 períodos. A carteira CMVL obteve retorno superior ao IBOV em 18 quadrimestres, porém o índice de Sharpe foi melhor em somente 16 quadrimestres. A CIP teve melhor retorno que o IBOV em 23 dos 33 períodos e índice de Sharpe superior em 24 quadrimestres. Em um primeiro momento da análise, a CIP teve o melhor desempenho por quadrimestre na comparação com o IBOV, porém o retorno da CBV foi superior ao da CIP em 20 períodos e o índice de Sharpe foi melhor em 18 dos 33 quadrimestres. A CIP de fato foi superior ao IBOV na análise por quadrimestres, tendo mais períodos de ganho sobre o índice de mercado do que as carteiras de menor risco, devido a maior correlação com IBOV e maior β , se comparado a CMVL e CBV. Portanto, quando o IBOV estava em um período de alta, a CIP também estava, além de ter apresentado maiores ganhos na maior parte do tempo. De outra forma, como o β e a correlação das carteiras CMVL e CBV com o IBOV apresentou um valor menor, em alguns momentos o movimento não seguiu a mesma direção e magnitude da CIP.

A diferença mais expressiva em favor da alta volatilidade do IBOV ocorreu em 2009, no auge da recuperação da crise do ano anterior (Gráfico 3). No primeiro quadrimestre de 2009, o retorno do IBOV foi de 104,92% e o desvio padrão de 39,77%, o mais alto em um único quadrimestre com o mercado em ascensão. Neste mesmo período, CIP, CMVL e CBV obtiveram retorno (desvio padrão) de 81,38% (31,42%), 47,60% (20,04%) e 43,03% (19,51%), respectivamente.

Gráfico 3 - Comparativo da rentabilidade acumulada em 2009Q1 e 2009Q2



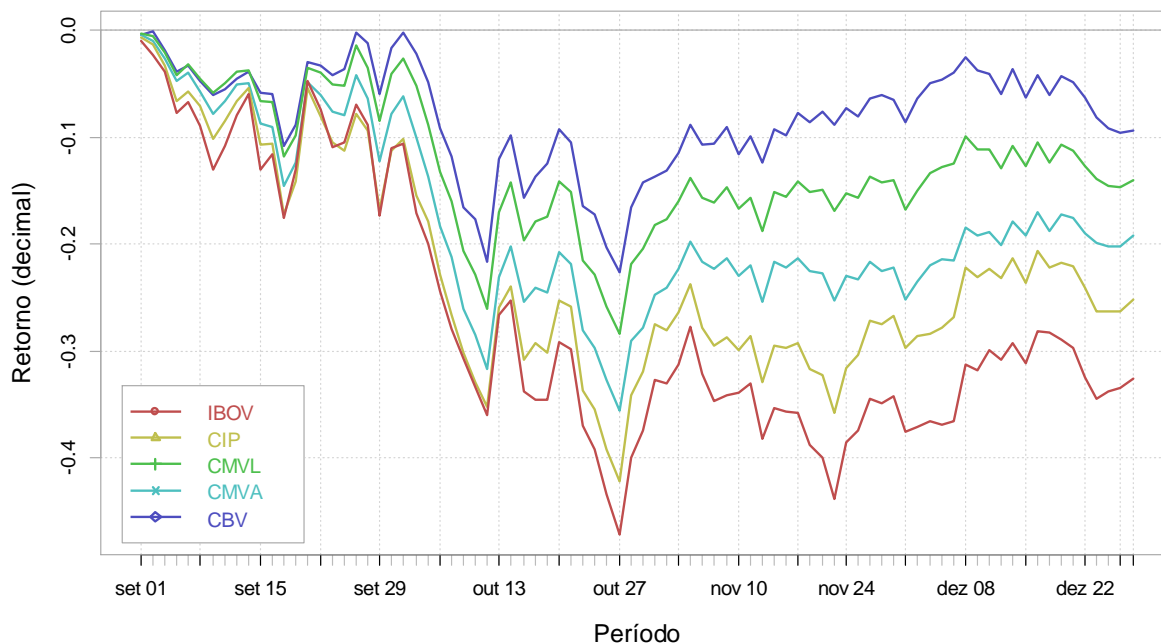
Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*

No segundo quadrimestre de 2009 o IBOV teve um retorno de 70,45%, enquanto CMVL e CBV apresentaram 10,95% e -1,17%, respectivamente. A CIP teve um retorno maior que o IBOV neste período, com 79,20%. Novamente, o desvio padrão de 24,98% do IBOV neste período foi aproximadamente o dobro do risco das carteiras de menor volatilidade, porém o retorno explosivo fez com que o índice de Sharpe fosse superior.

Assim, a alta volatilidade beneficiou o IBOV nos períodos de alta, mas o penalizou fortemente em períodos de queda. O terceiro quadrimestre de 2008, apresentado no Gráfico 4, demonstra este efeito quando o mercado está em baixa. Neste período o IBOV teve a maior queda registrada na amostra do estudo. Com um retorno (desvio padrão) de -69,33% (78,73%), o IBOV perdeu em termos absolutos aproximadamente 1/3 do valor de mercado neste único quadrimestre e este número não foi maior graças ao período de outubro a dezembro, onde se iniciou a recuperação da crise. As carteiras CIP, CMVL e CBV também apresentaram retorno negativo de 58,17%, 36,45 e 25,66%, respectivamente. A perda de valor absoluto da CBV, por exemplo, foi de apenas 9,41%, apesar de também ter recuperado boa parte das perdas do período a partir de outubro. Além de uma perda muito menor

que o IBOV, as carteiras de menor risco apresentaram desvio padrão menor, perto de 2/3 do risco da carteira de mercado.

Gráfico 4 - Comparativo da rentabilidade acumulada em 2008Q3



Fonte: Elaborado pelo autor no *Software R*

Portanto, o IBOV é fortemente impulsionado pela grande volatilidade nos períodos de alta, como a recuperação da crise em 2009, porém é muito prejudicado pela alta volatilidade nos períodos de baixa do mercado, como a crise ocorrida em 2008. O grande incremento na volatilidade do IBOV no período da crise é mais um sinal de que a assimetria da volatilidade é verificada no mercado de ações brasileiro.

4.2 RESTRIÇÕES DE PESOS E QUANTIDADE DE ATIVOS

No período analisado, o IBOV e a CIP apresentaram em média 62 ativos na carteira, variando entre 53 e 73. A CMVL teve em média 19 ativos, com a composição variando entre 15 e 24. A CMVA foi formada em média por 22 ativos, tendo uma variação entre 18 e 26, enquanto a CBV teve em média 11 ações, variando entre 10 e 13, representando a carteira menos diversificada entre as analisadas. As carteiras CIP e CBV podem ser facilmente formadas sem a utilização de softwares estatísticos, pois não passaram pelo processo de otimização da carteira, podendo ser utilizada uma simples planilha eletrônica. Já as carteiras CMVL

e CMVA passaram pelo processo de minimização da variância global, necessitando de software específico para sua implementação. Além disso, a quantidade de ativos da CBV foi muito menor que nas demais carteiras, podendo reduzir o custo de implementação da estratégia e facilitando a utilização por investidores individuais.

Os resultados das carteiras otimizadas CMVL e CMVA foram obtidos restringindo os pesos dos ativos em 8% e 6%, respectivamente. A carteira de baixa volatilidade CBV foi calculada utilizando 18% dos ativos de menor desvio padrão anualizado, dentre os componentes do IBOV. Um detalhe importante a destacar é o fato de que a imposição de uma restrição que assuma menores pesos para os ativos das carteiras otimizadas CMVL e CMVA mostrou ser benéfica.

Foram testados limites de pesos variando de 5% a 20%, 30% e 50% por ativo e foi observado que quanto menor é este limite, maior é o retorno e o desvio padrão da carteira, com exceção da CMVL a 5% e 6%, onde o retorno diminui em comparação a restrição de 7%. Neste caso, analisar isoladamente os dados de retorno e desvio padrão não é o suficiente para compreender qual a melhor restrição para a carteira, pois o risco e o retorno aumentam à medida que se impõe uma restrição mais rígida. Porém, ao analisar a razão de Sharpe, nota-se que o maior retorno verificado compensa o ligeiro aumento do risco, resultando em um maior índice de Sharpe. Como as carteiras com limite de peso de 8% (CMVL) e 6% (CMVA) foram as que apresentaram o melhor resultado ajustado ao risco, estas foram utilizadas para o estudo comparativo. A comparação de risco e retorno das carteiras com diferentes restrições de pesos pode ser vista no Apêndice C.

Estas considerações sobre o limite de pesos da carteira vão ao encontro do trabalho de Thomé Neto, Leal e Almeida (2011), mas divergem do trabalho apresentado por Rubesam e Beltrame (2013), onde os autores utilizaram uma restrição de 15% para os pesos dos ativos e reportaram que a utilização de uma restrição de 10% piorou ligeiramente o índice de Sharpe da carteira. Ao utilizar uma restrição de 30%, os autores citam um índice de Sharpe maior que no caso da restrição de 15%, porém não consideram relevantes estas diferenças. Então, Rubesam e Beltrame (2013, p.26) concluem que “[...] a alocação máxima não é um fator crucial para o desempenho [...]”. Estas variações do índice de Sharpe seguem movimento contrário ao verificado neste trabalho, onde, quanto menor é o percentual que os ativos podem assumir na carteira, maior é o índice de Sharpe apresentado. Assumir um limite de 30% para o peso dos ativos, como testado no estudo de

Rubesam e Beltrame (2013), fez com que CMVL e CMVA apresentassem retorno 1/3 pior do que com a restrição de 8% e 6%, respectivamente, permitindo se presumir que a alocação máxima é sim um fator muito importante para o desempenho das carteiras de mínima variância, conforme já apontou Jagannathan e Ma (2003).

Vale ressaltar que Rubesam e Beltrame (2013) utilizam um universo de ativos muito maior, considerando elegíveis todos os ativos listados em bolsa, enquanto neste estudo são utilizados somente os ativos que compuseram o IBOV no período da carteira analisada. Esta diferença de quantidade de ativos disponíveis para a formação da carteira poderia explicar a diferença no resultado. O IBOV tem uma quantidade limitada de ações e estas, tem quantidade e volume de negociação muito maior que os ativos que não compõem o índice, possibilitando que as ações apresentem maior volatilidade do que as ações fora do índice. No presente estudo, restringir o peso máximo dos ativos para baixo, de forma a diversificar e diluir o risco pode fazer com que a carteira apresente possivelmente um maior índice de Sharpe.

A carteira CBV foi formada através de um percentual do total de ações que compuseram o IBOV. As ações foram classificadas por ordem crescente de desvio padrão e, após isto, foi feita a seleção do percentual de ações menos voláteis e ponderação dos pesos. Esse percentual foi testado variando de 10% a 20%, 30% e 50% das ações de menor risco. Neste caso, não houve uma definição muito clara para a relação entre percentual de ativos e retorno da carteira. Por outro lado, o comportamento do desvio padrão sugeriu uma tendência crescente à medida que aumenta a quantidade de ativos nesta carteira. O Apêndice D apresenta os dados referentes à carteira com diferentes percentuais de ativos. O melhor retorno por unidade de risco foi obtido com a carteira configurada com 18% dos ativos menos voláteis do IBOV, portanto esta carteira foi utilizada na análise comparativa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo mostrou que as carteiras formadas por estratégias de baixa volatilidade apresentaram performance média superior ao índice de mercado, tanto em termos de retorno absoluto, quanto em termos de retorno por unidade de risco medido pelo índice de Sharpe. Além disso, as carteiras apresentaram indicadores de risco relativamente menores, baixo β , desempenho superior em períodos com mercado em baixa e inferior em períodos de alta expressiva. Os resultados foram consistentes com os alcançados recentemente por Rubesam e Beltrame (2013) no Brasil, além de corroborar o trabalho pioneiro de Haugen e Heins (1975) e tantos outros que foram realizados nas últimas décadas, revisados neste estudo.

Além disso, analisando o período específico da crise de 2008, verificou-se um comportamento “anti-bolha” nas carteiras de menor risco. Os eventos que precederam a crise geraram grande stress no mercado, fazendo com que a volatilidade dos principais ativos da bolsa (*blue chips*) se elevasse. Os ativos mais voláteis não satisfizeram os critérios de seleção das carteiras de menor risco. Logo, no momento da ruptura da bolha essas carteiras estavam compostas pelas ações menos voláteis, tendo uma queda de menor magnitude.

Portanto, os portfólios calculados com base no risco e que não dependem da estimação de retorno esperado, como as carteiras de mínima variância e baixa volatilidade, são promissores para investidores que buscam minimizar os riscos globais sem comprometer o retorno. Isso porque as carteiras de menor risco apresentaram, em média, um terço a menos de risco do que a carteira de mercado e retorno aproximadamente 50% superior.

Apesar de não ser o objetivo deste trabalho, ficou clara a melhora na estimação da matriz de covariância quando utilizado o método de encolhimento da matriz amostral proposto por Ledoit e Wolf (2003), corroborando os estudos destes autores. Complementarmente, a determinação dos pesos dos ativos nas carteiras de mínima variância foi um aspecto importante verificado neste trabalho. Enquanto o estudo mais recente de Rubesam e Beltrame (2013) não considera a determinação de pesos um fator crucial, o presente estudo verificou grande importância para os pesos dos ativos a ponto de determinar se desempenho da carteira seria superior ou inferior ao mercado e à carteira igualmente ponderada.

Logo, um estudo específico sobre a ponderação de pesos nas carteiras de mínima variância poderia trazer respostas para esta diferença constatada entre este e aquele trabalho. Esta diferença pode ser atribuída ao maior universo de ativos elegíveis no estudo daqueles autores, mas esta é uma consideração que deve ser apurada.

Da mesma forma, uma análise aprofundada do “efeito volatilidade” seria interessante para compreender qual o motivo deste comportamento que leva as ações de menor risco a apresentar maior retorno. Além disso, se fosse verificada a composição do índice *S&P 500 Low Volatility*, utilizado como modelo para a carteira de baixa volatilidade neste trabalho, seria perceptível a diminuição da exposição do índice ao setor bancário, onde foi originada a crise de 2008. Portanto, o poder preditivo de crises das carteiras de baixa volatilidade mostra-se um bom tema para estudos futuros.

Por fim, foi possível notar que as estratégias de menor risco recaem sobre carteiras com poucos ativos, sendo facilmente replicáveis por investidores individuais. A carteira de baixa volatilidade foi construída através de um método muito simples, porém ainda não havia sido explorada nos estudos realizados no Brasil e surpreendeu ao apresentar os melhores resultados.

REFERÊNCIAS

ANG, Andrew et al. The cross-section of volatility and expected returns. **The Journal of Finance**, v. 61, n. 1, p. 259-299, 2006.

BLACK, Fischer. Beta and return: announcements of the 'death of beta' seem premature. **Journal of Portfolio Management**, p. 11-18, 1993.

BLACK, Fischer. Studies in stock price volatility changes. In: PROCEEDINGS OF THE 1976 MEETING OF THE BUSINESS AND ECONOMICS STATISTICS SECTION, 1976, Washington. **Anais...**, Washington: AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION, 1976. p. 177-181.

BLACK, Fischer; JENSEN, Michael C.; SCHOLES, Myron S. The capital asset pricing model: Some empirical tests. 1972.

BLITZ, David C.; VAN VLIET, Pim. **The volatility effect: Lower risk without lower return**. ERIM Report Series Research in Management, 2007.

BLITZ, David; PANG, Juan; VAN VLIET, Pim. The volatility effect in emerging markets. **Emerging Markets Review**, v. 16, p. 31-45, 2013.

BUFFETT, Mary; CLARK, David. **O Tao de Warren Buffett**. Rio de Janeiro: Sextante, 2007.

CHRISTENSEN, Morten Mosegaard. On the history of the Growth Optimal Portfolio. **Preprint, University of Southern Denmark**, v. 389, 2005.

CLARKE, Roger G.; DE SILVA, Harindra; THORLEY, Steven. Minimum-variance portfolios in the US equity market. **The journal of portfolio management**, v. 33, n. 1, p. 10-24, 2006.

CONNOR, Gregory; KORAJCZYK, Robert A. Risk and return in an equilibrium APT: Application of a new test methodology. **Journal of Financial Economics**, v. 21, n. 2, p. 255-289, 1988.

CORNISH, Edmund A.; FISHER, Ronald A. Moments and cumulants in the specification of distributions. **Revue de l'Institut international de Statistique**, p. 307-320, 1938.

DA SILVA, Carlos Alberto Gonçalves; DA SILVA, Thiago Gonçalves. Persistência e Assimetria na volatilidade dos retornos dos IBOVESPA: aplicação dos modelos ARCH. **Cadernos [SYN] THESIS**, v. 6, n. 1, p. 19-27, 2013.

DEMIGUEL, Victor et al. A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms. **Management Science**, v. 55, n. 5, p. 798-812, 2009.

DEMIGUEL, Victor; GARLAPPI, Lorenzo; UPPAL, Raman. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?. **Review of Financial Studies**, v. 22, n. 5, p. 1915-1953, 2009.

FALKENSTEIN, Eric G. **Mutual funds, idiosyncratic variance, and asset returns**. 1994. 129 f. Tese (Doutorado em Filosofia). – Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Área de Economia, Northwestern University, Evanston, 1994.

FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. The cross-section of expected stock returns. **The Journal of Finance**, v. 47, n. 2, p. 427-465, 1992.

FAMA, Eugene F.; MACBETH, James D. Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. **The Journal of Political Economy**, p. 607-636, 1973.

HAUGEN, Robert A.; BAKER, Nardin L. The efficient market inefficiency of capitalization-weighted stock portfolios. **The Journal of Portfolio Management**, v. 17, n. 3, p. 35-40, 1991.

HAUGEN, Robert A.; HEINS, A. James. Risk and the rate of return on financial assets: Some old wine in new bottles. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 10, n. 05, p. 775-784, 1975.

JAGANNATHAN, Ravi; MA, Tongshu. Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. **The Journal of Finance**, v. 58, n. 4, p. 1651-1684, 2003.

JOBSON, J. David; KORKIE, Bob. Estimation for Markowitz efficient portfolios. **Journal of the American Statistical Association**, v. 75, n. 371, p. 544-554, 1980.

JUBERT, Roberto Wagner et al. Um estudo do padrão de volatilidade dos principais índices financeiros do Bovespa: uma aplicação de modelos ARCH. **Contabilidade, Gestão e Governança**, v. 11, n. 1-2, 2009.

KAHNEMAN, Daniel; TVERSKY, Amos. Prospect theory: An analysis of decision under risk. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, p. 263-291, 1979.

KRAUS, Alan; LITZENBERGER, Robert H. Skewness preference and the valuation of risk assets*. **The Journal of Finance**, v. 31, n. 4, p. 1085-1100, 1976.

KRITZMAN, Mark; PAGE, Sébastien; TURKINGTON, David. In defense of optimization: the fallacy of 1/N. **Financial Analysts Journal**, p. 31-39, 2010.

LEAL, Ricardo PC; MENDES, Beatriz VM. Incorporating tail dependence into markowitz mean-variance model. **Unpublished Working Paper, Instituto Coppead de Administração/UFRJ**, 2010.

LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. **Journal of multivariate analysis**, v. 88, n. 2, p. 365-411, 2004b.

LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Honey, I shrunk the sample covariance matrix. **The Journal of Portfolio Management**, v. 30, n. 4, p. 110-119, 2004a.

LEDOIT, Olivier; WOLF, Michael. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. **Journal of empirical finance**, v. 10, n. 5, p. 603-621, 2003.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio selection*. **The journal of finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MEDEIROS, Luiz Gustavo Carini. **Análise quantitativa da volatilidade dos índices setoriais da Bovespa através de modelos garch univariados**. 2012. 78 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Ciências Econômicas) – Curso de Graduação em Economia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, 2012.

MERTON, Robert C. On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. **Journal of Financial Economics**, v. 8, n. 4, p. 323-361, 1980.

MÓL, Anderson Luiz Rezende; DOS SANTOS FELIPE, Israel José; JÚNIOR, Franklin Medeiros Galvão. VOLATILIDADE DOS ÍNDICES DE AÇÕES MID-LARGE CAP E SMALL CAP: UMA INVESTIGAÇÃO A PARTIR DE MODELOS ARIMA/GARCH. **Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade**, v. 4, n. 1, p. 04-29, 2014.

PETERSON, Brian G.; CARL, Peter. Carl. **PerformanceAnalytics**: Econometric tools for performance and risk analysis. R package version 1.4.3541, 2014. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=PerformanceAnalytics2014>>. Acesso em: 15 set. 2014.

ROSENBERG, Barr. Extra-market components of covariance in security returns. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 9, n. 02, p. 263-274, 1974.

ROUSSEEUW, Peter J. Least median of squares regression. **Journal of the American statistical association**, v. 79, n. 388, p. 871-880, 1984.

ROWE, Brian Lee Yung. **tawny**: Provides various portfolio optimization strategies including random matrix theory and shrinkage estimators. R package version 2.1.2, 2014. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=tawny>>. Acesso em: 15 set. 2014.

RSTUDIO. **RStudio**: Integrated development environment for R. Version 0.96.122, Boston, 2014. Disponível em: <<http://www.rstudio.org>>. Acesso em: 15 jun. 2014.

RUBESAM, Alexandre; BELTRAME, André Lomonaco. Carteiras de Variância Mínima no Brasil. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 11, n. 1, p. 81-118, 2013.

RYAN, Jeffrey A.; ULRICH, Joshua M. **xts**: eXtensible Time Series. R package version 0.9-7, 2014. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=xts>>. Acesso em: 15 set. 2014.

SANTOS, André Alves Portela; TESSARI, Cristina. Técnicas quantitativas de otimização de carteiras aplicadas ao mercado de ações brasileiro. **Revista Brasileira de Finanças**, v. 10, n. 3, p. 369-393, 2012.

SHARPE, William F. A simplified model for portfolio analysis. **Management science**, v. 9, n. 2, p. 277-293, 1963.

SHARPE, William F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*. **The journal of finance**, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

TEAM, R Core. **R**: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, 2014. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>. Acesso em 15 jun. 2014.

THOMÉ NETO, César; LEAL, Ricardo Pereira Câmara; ALMEIDA, Vinício de Souza. Um índice de mínima variância de ações brasileiras. **Economia Aplicada**, v. 15, n. 4, p. 535-557, 2011.

TURLACH, Berwin A; WEINGESSEL, Andreas. **quadprog**: Functions to solve Quadratic Programming Problems. R package version 1.5-5, 2013. Disponível em: <<http://CRAN.R-project.org/package=quadprog>>. Acesso em: 15 set. 2014.

ZANGARI, Peter. An improved methodology for measuring VaR. **RiskMetrics Monitor**, v. 2, n. 1, p. 7-25, 1996.

APÊNDICE A – DADOS COMPARATIVOS POR ANO

Tabela 5 - Dados comparativos por ano

Ano	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2003	Retorno anualizado	98,41%	117,46%	91,56%	99,53%	75,89%
	Desvio padrão anualizado	24,24%	22,88%	15,65%	15,95%	15,88%
	IS anualizado	2,52	3,35	3,55	3,89	2,70
Ano	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2004	Retorno anualizado	18,04%	25,14%	29,73%	29,29%	30,41%
	Desvio padrão anualizado	28,47%	28,32%	21,70%	22,06%	22,62%
	IS anualizado	-0,15	0,05	0,24	0,22	0,26
Ano	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2005	Retorno anualizado	28,09%	27,09%	23,54%	23,99%	30,73%
	Desvio padrão anualizado	24,93%	25,44%	20,21%	20,74%	20,57%
	IS anualizado	0,16	0,12	0,01	0,03	0,30
Ano	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2006	Retorno anualizado	33,86%	39,29%	36,90%	35,58%	39,35%
	Desvio padrão anualizado	24,25%	23,48%	20,21%	20,13%	21,53%
	IS anualizado	0,35	0,55	0,55	0,49	0,60
Ano	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2007	Retorno anualizado	45,15%	29,65%	25,00%	19,34%	44,75%
	Desvio padrão anualizado	27,40%	25,64%	21,89%	22,57%	22,41%
	IS anualizado	0,65	0,20	0,06	-0,14	0,78
Ano	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2008	Retorno anualizado	-41,60%	-30,87%	-14,08%	-22,31%	-9,23%
	Desvio padrão anualizado	52,46%	47,28%	34,74%	37,99%	32,91%
	IS anualizado	-1,00	-0,93	-0,87	-0,97	-0,80
Ano	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2009	Retorno anualizado	85,36%	81,12%	33,66%	37,90%	25,31%
	Desvio padrão anualizado	31,50%	25,80%	16,52%	17,05%	16,30%
	IS anualizado	1,60	1,82	0,51	0,69	0,10
Ano	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2010	Retorno anualizado	1,07%	4,97%	26,69%	22,01%	19,18%
	Desvio padrão anualizado	20,37%	18,24%	12,84%	13,43%	13,82%
	IS anualizado	-0,89	-0,82	0,22	-0,08	-0,24
Ano	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2011	Retorno anualizado	-18,31%	-12,18%	22,49%	19,99%	24,79%
	Desvio padrão anualizado	24,68%	23,66%	16,33%	17,01%	16,55%
	IS anualizado	-1,37	-1,22	-0,04	-0,15	0,08
Ano	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2012	Retorno anualizado	7,58%	14,93%	8,24%	8,83%	2,32%
	Desvio padrão anualizado	21,60%	19,46%	13,12%	13,11%	14,29%
	IS anualizado	-0,59	-0,35	-0,93	-0,90	-1,19
Ano	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2013	Retorno anualizado	-15,72%	-8,55%	0,69%	0,65%	-0,80%
	Desvio padrão anualizado	20,56%	19,86%	13,79%	13,84%	14,06%
	IS anualizado	-1,54	-1,30	-1,33	-1,33	-1,39

Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*

APÊNDICE B – DADOS COMPARATIVOS POR QUADRIMESTRE

Tabela 6 – Dados comparativos por quadrimestre

(continua)

Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2003 Q1	Retorno anualizado	40,03%	42,91%	2,55%	13,82%	-0,17%
	Desvio padrão anualizado	28,29%	26,59%	14,91%	16,49%	15,02%
	IS anualizado	0,40	0,51	-1,24	-0,58	-1,37
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2003 Q2	Retorno anualizado	76,50%	84,49%	120,37%	124,56%	106,88%
	Desvio padrão anualizado	22,51%	20,94%	13,07%	13,62%	13,34%
	IS anualizado	1,79	2,23	5,76	5,77	4,84
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2003 Q3	Retorno anualizado	210,46%	281,64%	202,52%	203,14%	157,01%
	Desvio padrão anualizado	21,60%	20,63%	17,91%	17,09%	18,37%
	IS anualizado	6,81	9,88	7,86	8,26	5,69
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2004 Q1	Retorno anualizado	-32,07%	-27,06%	-25,18%	-20,61%	-29,27%
	Desvio padrão anualizado	35,33%	34,51%	27,19%	28,19%	27,24%
	IS anualizado	-1,30	-1,22	-1,49	-1,31	-1,61
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2004 Q2	Retorno anualizado	56,47%	70,13%	73,69%	71,14%	61,22%
	Desvio padrão anualizado	29,17%	29,74%	21,70%	22,01%	23,14%
	IS anualizado	0,84	1,19	1,76	1,64	1,22
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2004 Q3	Retorno anualizado	53,16%	56,17%	66,23%	57,45%	92,99%
	Desvio padrão anualizado	18,28%	18,20%	14,02%	13,41%	15,70%
	IS anualizado	1,19	1,33	2,30	1,88	3,41
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2005 Q1	Retorno anualizado	-15,38%	-16,18%	-25,54%	-23,60%	-13,40%
	Desvio padrão anualizado	26,91%	27,10%	22,24%	22,51%	23,18%
	IS anualizado	-1,22	-1,23	-1,84	-1,74	-1,34
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2005 Q2	Retorno anualizado	42,06%	37,36%	49,04%	44,09%	59,51%
	Desvio padrão anualizado	25,16%	27,50%	18,24%	19,79%	17,98%
	IS anualizado	0,51	0,34	1,02	0,74	1,49
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2005 Q3	Retorno anualizado	71,98%	75,66%	65,91%	69,57%	58,19%
	Desvio padrão anualizado	22,66%	21,26%	20,02%	19,81%	20,48%
	IS anualizado	1,62	1,87	1,60	1,76	1,26

(continuação)

Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2006 Q1	Retorno anualizado	80,63%	81,50%	58,72%	59,47%	64,40%
	Desvio padrão anualizado	22,16%	20,90%	18,63%	18,78%	19,76%
	IS anualizado	1,97	2,12	1,41	1,43	1,56
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2006 Q2	Retorno anualizado	-26,86%	-20,46%	-6,60%	-9,41%	-15,15%
	Desvio padrão anualizado	29,54%	29,43%	25,40%	25,23%	26,63%
	IS anualizado	-1,42	-1,25	-1,01	-1,11	-1,22
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2006 Q3	Retorno anualizado	92,27%	97,46%	79,60%	79,36%	103,53%
	Desvio padrão anualizado	19,07%	17,73%	14,49%	14,26%	16,17%
	IS anualizado	2,78	3,22	2,96	2,99	3,83
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2007 Q1	Retorno anualizado	34,82%	37,57%	31,04%	22,84%	42,03%
	Desvio padrão anualizado	26,20%	24,22%	19,51%	20,30%	19,97%
	IS anualizado	0,28	0,39	0,22	-0,11	0,65
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2007 Q2	Retorno anualizado	37,95%	32,80%	34,20%	30,83%	36,81%
	Desvio padrão anualizado	26,05%	24,74%	23,16%	22,75%	23,03%
	IS anualizado	0,37	0,23	0,29	0,18	0,38
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2007 Q3	Retorno anualizado	65,74%	18,74%	10,06%	4,66%	57,10%
	Desvio padrão anualizado	30,26%	28,24%	23,04%	24,77%	24,30%
	IS anualizado	1,05	-0,20	-0,54	-0,68	1,03
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2008 Q1	Retorno anualizado	20,70%	24,83%	30,53%	19,89%	28,26%
	Desvio padrão anualizado	35,55%	32,08%	26,43%	26,83%	25,84%
	IS anualizado	-0,11	-0,02	0,14	-0,17	0,08
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2008 Q2	Retorno anualizado	-44,78%	-35,39%	-22,39%	-24,73%	-20,59%
	Desvio padrão anualizado	27,94%	25,18%	19,22%	20,82%	19,16%
	IS anualizado	-2,01	-1,93	-1,99	-1,93	-1,93
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2008 Q3	Retorno anualizado	-69,33%	-58,17%	-36,45%	-47,24%	-25,66%
	Desvio padrão anualizado	78,73%	70,96%	50,54%	56,34%	47,11%
	IS anualizado	-0,96	-0,94	-0,98	-1,03	-0,87

(continuação)

Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2009 Q1	Retorno anualizado	104,92%	81,38%	47,60%	52,04%	43,03%
	Desvio padrão anualizado	39,77%	31,42%	20,04%	20,95%	19,51%
	IS anualizado	1,58	1,41	0,87	1,00	0,71
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2009 Q2	Retorno anualizado	70,45%	79,20%	10,95%	20,64%	-1,17%
	Desvio padrão anualizado	28,33%	22,91%	13,64%	14,37%	14,24%
	IS anualizado	1,26	1,86	-0,86	-0,28	-1,50
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2009 Q3	Retorno anualizado	82,91%	82,88%	46,83%	43,67%	40,44%
	Desvio padrão anualizado	24,98%	22,51%	15,46%	15,36%	14,80%
	IS anualizado	1,82	2,02	1,09	0,93	0,79
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2010 Q1	Retorno anualizado	-4,78%	-11,66%	3,19%	-0,04%	-5,88%
	Desvio padrão anualizado	19,20%	17,21%	12,64%	13,09%	13,11%
	IS anualizado	-1,27	-1,73	-1,42	-1,57	-1,92
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2010 Q2	Retorno anualizado	-10,11%	6,26%	34,35%	27,22%	25,63%
	Desvio padrão anualizado	24,25%	21,44%	13,04%	13,99%	14,04%
	IS anualizado	-1,18	-0,72	0,52	0,08	-0,01
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2010 Q3	Retorno anualizado	20,95%	22,62%	45,63%	41,94%	42,07%
	Desvio padrão anualizado	17,00%	15,60%	12,87%	13,24%	14,29%
	IS anualizado	-0,23	-0,16	1,23	0,97	0,91
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2011 Q1	Retorno anualizado	-13,72%	0,00%	27,78%	31,25%	27,37%
	Desvio padrão anualizado	16,61%	15,45%	12,68%	12,72%	13,18%
	IS anualizado	-1,89	-1,33	0,13	0,35	0,10
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2011 Q2	Retorno anualizado	-36,63%	-30,62%	-7,55%	-12,39%	-4,71%
	Desvio padrão anualizado	27,54%	26,29%	18,57%	19,59%	18,11%
	IS anualizado	-1,80	-1,71	-1,43	-1,55	-1,34
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2011 Q3	Retorno anualizado	1,42%	-0,64%	58,42%	53,47%	62,85%
	Desvio padrão anualizado	28,05%	27,28%	16,95%	17,71%	17,75%
	IS anualizado	-0,69	-0,77	1,53	1,25	1,66

(conclusão)

Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2012 Q1	Retorno anualizado	30,05%	51,33%	49,98%	49,84%	37,11%
	Desvio padrão anualizado	18,57%	15,67%	10,22%	10,31%	11,23%
	IS anualizado	0,18	1,30	1,89	1,86	0,80
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2012 Q2	Retorno anualizado	-20,92%	-16,55%	-22,94%	-21,34%	-24,84%
	Desvio padrão anualizado	26,38%	24,79%	14,76%	14,68%	15,83%
	IS anualizado	-1,41	-1,36	-2,63	-2,55	-2,54
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2012 Q3	Retorno anualizado	23,75%	22,48%	11,73%	11,23%	5,69%
	Desvio padrão anualizado	18,62%	16,14%	13,70%	13,72%	15,26%
	IS anualizado	-0,08	-0,16	-0,81	-0,84	-1,04
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2013 Q1	Retorno anualizado	-23,56%	-17,96%	16,91%	14,69%	11,85%
	Desvio padrão anualizado	18,36%	17,82%	12,72%	12,66%	13,83%
	IS anualizado	-2,14	-1,95	-0,55	-0,70	-0,80
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2013 Q2	Retorno anualizado	-28,15%	-19,04%	-19,42%	-18,18%	-17,75%
	Desvio padrão anualizado	23,41%	23,46%	15,26%	15,53%	14,26%
	IS anualizado	-1,83	-1,52	-2,36	-2,25	-2,43
Período	Carteira	IBOV	CIP	CMVL	CMVA	CBV
2013 Q3	Retorno anualizado	9,48%	15,51%	9,44%	9,65%	6,99%
	Desvio padrão anualizado	19,58%	17,73%	13,24%	13,16%	14,18%
	IS anualizado	-0,66	-0,46	-0,98	-0,97	-1,05

Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*

APÊNDICE C – RESTRIÇÕES DE PESOS DOS ATIVOS

Tabela 7 – Resultados para as restrições de pesos dos ativos na carteira CMVL

Restrição de pesos	Retorno anualizado	Desvio padrão anualizado	IS anualizado
5%	22,43%	20,92%	0,391
6%	23,09%	20,46%	0,428
7%	23,63%	20,06%	0,460
8%	23,53%	19,75%	0,463
9%	22,85%	19,53%	0,438
10%	21,88%	19,37%	0,397
11%	21,20%	19,23%	0,369
12%	20,71%	19,11%	0,349
13%	20,32%	19,02%	0,332
14%	19,90%	18,98%	0,313
15%	19,47%	18,93%	0,294
20%	17,53%	18,80%	0,205
30%	15,44%	18,86%	0,106
50%	14,64%	19,01%	0,068

Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*

Tabela 8 – Resultados para as restrições de pesos dos ativos na carteira CMVA

Restrição de pesos	Retorno anualizado	Desvio padrão anualizado	IS anualizado
5%	22,16%	21,01%	0,378
6%	21,99%	20,58%	0,379
7%	21,69%	20,18%	0,373
8%	21,43%	19,88%	0,367
9%	20,81%	19,69%	0,343
10%	20,25%	19,56%	0,320
11%	19,95%	19,44%	0,308
12%	19,56%	19,36%	0,291
13%	19,09%	19,30%	0,271
14%	18,60%	19,25%	0,249
15%	18,16%	19,18%	0,230
20%	16,72%	19,01%	0,165
30%	14,71%	19,06%	0,071
50%	14,20%	19,14%	0,047

Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*

APÊNDICE D – PERCENTUAL DE AÇÕES NA CARTEIRA CBV

Tabela 9 - Resultados para os percentuais de ativos na carteira CBV

Percentual de ativos	Retorno anualizado	Desvio padrão anualizado	IS anualizado
10%	19,68%	19,82%	0,290
11%	19,31%	19,90%	0,273
12%	18,46%	19,82%	0,236
13%	18,54%	19,98%	0,237
14%	20,50%	19,93%	0,325
15%	21,12%	20,03%	0,351
16%	22,26%	19,95%	0,403
17%	23,72%	19,93%	0,468
18%	23,70%	19,92%	0,467
19%	23,21%	20,04%	0,443
20%	22,84%	20,13%	0,424
30%	21,63%	21,19%	0,353
50%	21,87%	22,50%	0,342

Fonte: Elaborado pelo autor no *software R*