GEOMETRIA FRACTAL: RELAÇÃO ENTRE O TETRAEDRO DE SIERPINSKI E O TRIÂNGULO DE PASCAL

Vanessa Cristiny Pires Baldi*[1]

Eixos Temáticos: Práticas pedagógicas de Iniciação à Docência nos Anos Finais e Ensino Médio

A história do surgimento da geometria fractal tem suas controvérsias já que Galileu Galilei diz que a matemática é a linguagem da natureza e seu alfabeto seria as figuras geométricas euclidianas. A ideia da geometria euclidiana é muito forte apesar de dois mil anos de sua existência ela não sofreu modificações, e como está muito presente no nosso dia a dia ela aparenta se encaixar bem no ponto de vista teórico. Entretanto para Lemois-Gordon se for analisada com mais frigidez as formas geométricas, seria notado que nem tudo na natureza se encaixa com esses padrões. Essa geometria teve tanto sucesso que os cientistas ficaram obcecados e taxaram as formas que não se enquadravam nesse padrão como não axiomáticas. Em 1872 Karl Weierstrass encontrou uma função com propriedade de ser continua em todo seu domínio, ou seja, uma função que existe para todos os valores reais, mas nenhuma parte diferencial.O gráfico da função foi denominado anos depois de fractal. Mas Helge Von Koch não satisfeito com a definição abstrata de Weiertrass deu uma função mais geométrica, atualmente conhecida como KochSnowflake ou floco de neve de Koch que é o resultado de infinitos triângulos no perímetro de um triângulo inicial, como abordado por Carvalho. A maior idoneidade da geometria fractal é representar melhor às formas da natureza as mesmas que a geometria euclidiana coloca como fora dos padrões. Mas seu criador de fato foi o matemático Benoit Mandelbrot onde ele indaga em seu livro Geometry of the nature, que: "Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, os litorais não são círculos, a casca das árvores não é lisa e tão pouco a luz viaja em linha reta". Barbosa em seu livro reforça a tese de Mandelbrot dizendo que não encontramos a definição dos fractais ao formalismo, mas isso não impede de não ser ensinado. Mesmosem um conceito concreto ele ainda pode ser assimilado e transposto em sala de aula. Éousado então, colocar em destaque uma definição

1 PUCPR, Licenciatura em matemática, vanessacpb97@gmail.com

que também possui brechas que servirá de base para descrever um fractal, é uma figura geométrica em que uma parte se aparenta a toda figura, conquistada através de um processo renovado e que pode ter uma dimensão não inteira. Essa definição trata de três características que julgamos fundamentais para indicar um fractal: auto semelhança, iteração e dimensão. Trabalhar fractais na escola, como dito no artigo de Niedermeyr, Koefender e Ross é explorar os exemplos presentes na natureza, estimulando o raciocínio lógico, fazendo com que o aluno queira participar e entender a atividade, contribuindo assim para que ele compreenda mais dos conceitos matemáticos. Deixa de usar sempre os mesmos materiais didáticos para usufruir de materiais audiovisuais e outros recursos com uma didática que gera o interesse dos mesmos para que eles possam obter uma observação e uma compreensão melhor do que está sendo exposto. A geometria fractal pode ser ensinada em qualquer nível de ensino, pois pode ser explicada através de uma simples dobradura de papel até a obscuridade moderna da matemática que envolve números complexos, modelagem, entre outros. Para Barbosa uma forma de explorar a geometria fractal no ensino, é o desenvolvimento do “senso estético” trabalhando com algo que os possibilite visualizar e se encantar com a harmonia que existe em um fractal.Ao explorarmos a geometria fractal encontramos vários conteúdos como o triângulo de Sierpinski. Silva descreve em seu livro como seria a construção desse triângulo: consiste em criar um triângulo equilátero, determinar os pontos médios do seguimento do triangulo inicial e fazer dele os vértices de quatros novos triângulos, eliminando o triângulo central. Em cada triângulo não eliminado, ao proceder aos passos anteriores monta-se um fractal. A partir disso consegue-se associar o triângulo de Sierpinski com um tetraedro de Sierpinski onde ao invés de eliminarmos do centro apenas a área de um triângulo, são removidos volumes centrais de cada face do tetraedro, sendo possível observar em cada face da pirâmide o triângulo de Sierpinski.Barbosa consegue associar a montagem do triângulo de Sierpinski com exponencial, quando removemos o triângulo central ficamos com três triângulos côngruos, pela construção dos triângulos ficam $3^1=3$. Em cada um dos três triângulos retiramos um triângulo de dentro deles removemos o central e temos então $3^3=9$, ao repetirmos o processo teremos $3^4 = 27$ com a remoção do central dos noves triângulos anteriores. Concluímos por indução que esse processo repetido temos 3^n, n seria a quantidade enésima (infinita) de triângulos removidos. Temos também o triângulo de pascal que é um triângulo aritmético infinito integrado por coeficientes binominais, a regra para construir esse triângulo é simples, a lateral do triângulo é formada pelo número 1 e o número de baixo é determinado pela soma dos dois números acima dele. O resultado determina quantos caminhos são possíveis daquela posição à uma determinada linha. O triângulo de pascal se submete a algumas propriedades que são: Todas as linhas do triângulo terão o ultimo e o primeiro elemento igual a 1, os elementos equidistantes pertencentes a mesma linha, possuem o mesmo valor, a soma de dois números dará o valor do número abaixo deles, a soma dos elementos de uma linha de numerador n será igual a 2n, a soma dos primeiros elementos de uma diagonal, é igual ao número localizado abaixo da última parcela.O triângulo de pascal pode ser associado ao triângulo de Sierpinski da seguinte forma. Se traçarmos um triângulo em cada número do triângulo de Pascal, obtemos um triângulo com vários triângulos dentro dele, se pintarmos todos os triângulos que possuem números impares dentro, vamos obter o triângulo de Sierpinski, onde os números pares seriam aqueles triângulos centrais que são eliminados para que possa ser desenhado mais triângulos. Com os conteúdos expostos, foi feita então uma aula para o 2° ano do ensino médio para explorar a geometria fractal, onde os mesmo conteúdos foram abordados em sala de aula, de uma maneira expositiva e explicativa para que eles compreendessem o conceito. A partir disso foi criada uma atividade envolvendo esses conteúdos para uma compreensão mais clara e espacial. A atividade consistia em construírem vários tetraedros, através de dobraduras, e com esses tetraedros eles construíram uma pirâmide de Sierpinski. Com a construção da pirâmide o objetivo da atividade era entender e fazer as relações entre a pirâmide de Sierpinski e o triângulo de Pascal. Tendo a relação que cada tetraedro representava um número ímpar do triângulo de pascal e os espaços formados entre os tetraedros que foram colados para montar a pirâmide, seriam no caso do triângulo de Sierpinski, os triângulos centrais que foram eliminados para desenhar e no caso do triângulo de Pascal eles significavam os números pares. Além da relação com o volume da pirâmide, também era possível obter relações com as faces da pirâmide. Onde cada face do tetraedro seria os triângulos criados a partir dos triângulos vazios do centro desses triângulos, e no triângulo de pascal cada face do tetraedro representaria um número impar e os espaços vazios entre as faces do tetraedro seriam os números pares do triângulo de Pascal. Com a atividade foi obtido vários resultados, onde os alunos conseguiram desenvolver as habilidades como: motoras na montagem da pirâmide com os tetraedros e o raciocínio lógico matemático onde eles conseguiram relacionar os triângulos e entender o conceito de um fractal. O objetivo da atividade foi adquirido com total sucesso. Em virtude dos fatos mencionados conclui-se que a aplicação de uma atividade usando recursos e metodologias diferenciadas, ajuda não apenas na compreensão de determinados conteúdos, mas também auxilia no envolvimento do aluno com a matemática, onde consegue visualizar uma aplicação mais real, que os tira do abstrato propondo algo mais prático e espacial.

Palavras chave: Geometria, Fractal, Matemática, Triângulo

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal:** *para a sala de aula*. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

CARVALHO, H. C.**Geometria Fractal**: Perspectivas epossibilidades no ensino da Matemática. 2005. Disponível em: http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/1857/1/Dissertacao_GeometriaF ractalPerpectivas.pdf

MANDELBROT, B. P. **The Fractal Geometry of Nature.** Nova York: W. H. Freeman and Company, 1977.

NIEDERMEYER, C.; KOEFENDER, C.; ROOS, L. **Geometria Fractal e Ensino de Matemática**. 2009. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_52.pdf

SILVA, K. B. R. **Noções de Geometrias não Euclidianas:** hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais. CVR. Curitiba, 2011.