

**UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS - UNISINOS  
UNIDADE ACADÊMICA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
NÍVEL MESTRADO**

**LEONARDO BALBINOT TURMINA**

**DESIGN CONSTRUTAL DE BIFURCAÇÕES DE TUBOS COM ESCOAMENTOS  
DE FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS DE CARREAU E DE BINGHAM**

**São Leopoldo**

**2020**

LEONARDO BALBINOT TURMINA

**DESIGN CONSTRUTAL DE BIFURCAÇÕES DE TUBOS COM ESCOAMENTOS  
DE FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS DE CARREAU E DE BINGHAM**

Dissertação apresentada como requisito  
para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia Mecânica, pelo Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica  
da Universidade do Vale do Rio dos Sinos  
- UNISINOS

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Flávia Schwarz Franceschini Zinani

São Leopoldo

2020

T941d Turmina, Leonardo Balbinot.  
Design construtal de bifurcações de tubos com escoamentos de fluidos não newtonianos de Carreau e de Bingham / por Leonardo Balbinot Turmina. – 2020.  
63 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) — Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, São Leopoldo, RS, 2020.  
“Orientadora: Dra. Flávia Schwarz Franceschini Zinani”.

1. Fluidos não newtonianos. 2. Modelo de Carreau.  
3. Modelo de Bingham. 4. Modelo power-law.  
5. Design construtal. 6. Tubos em T. I. Título.

CDU: 621

## ABSTRACT

**Abstract:** Bifurcações de tubos têm sido consideravelmente analisadas buscando-se valores ótimos para a minimização da resistência ao escoamento. A Teoria Construtal fornece uma base teórica para prever as geometrias ótimas, as quais minimizam a resistência ao escoamento sob diferentes condições e restrições. Esta dissertação aborda o Design Construtal de geometrias bifurcadas em “T” para escoamentos laminares de fluidos não newtonianos, para as quais são buscadas razões de aspecto ótimas para os diâmetros e comprimentos dos tubos ramo principal e ramos secundários, mediante restrição de volume. Foram analisados os modelos power-law, de Carreau e de Bingham. Para o modelo power-law, foi feito um desenvolvimento analítico, e, pela formulação conveniente de um número de Reynolds power-law, obteve-se a mesma razão ótima proposta por Hess e Murray para fluidos newtonianos. Para modelos não newtonianos mais complexos, utilizou-se uma solução semi-analítica da literatura para a perda de carga e empregou-se um algoritmo numérico com o auxílio do software EES para a obtenção das razões de aspecto ótimas. Uma análise fatorial de três fatores em dois níveis indicou que, no caso do modelo de Carreau, os parâmetros reológicos possuem efeitos significativos sobre as geometrias ótimas, com destaque para a razão de viscosidades. Apresenta-se a análise de sensibilidade aos parâmetros reológicos dos modelos Carreau e Bingham para a minimização da resistência ao escoamento. Este trabalho fornece, além dos resultados de razões de aspecto ótimas de tubulações, uma perspectiva de aplicação do Design Construtal utilizando soluções semi-analíticas para modelos reológicos complexos.

**Palavras-chave:** fluidos não newtonianos, modelo de Carreau, modelo de Bingham, modelo power-law, Design Construtal, tubos em T.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de gráfico do Modelo de Bingham comparando o seu crescimento linear ( $\tau y$ ) com o comportamento de baixa taxa ( $\tau S$ ) .....	15
Figura 2 - Comportamento da viscosidade aparente em função da taxa de deformação para o Modelo de Carreau.....	18
Figura 3 - Estrutura da geometria.....	26
Figura 4 - Passos para aplicação do Método Design Construtal.....	27
Figura 5 - Efeito do parâmetro $\eta^*$ .....	49
Figura 6 - Efeito do parâmetro $\lambda$ .....	50
Figura 7 - Efeito do parâmetro $n$ .....	51
Figura 8 - Efeito do parâmetro $Bn$ .....	52
Figura 9 - Aproximação do efeito do parâmetro $Bn$ .....	53

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 - Valores obtidos com modelo newtoniano (intervalo menor).....	35
Tabela 2 - Valores obtidos com modelo newtoniano (intervalo maior).....	36
Tabela 3 - Valores obtidos com modelo de Carreau .....	47
Tabela 4 - Matriz X (para o cálculo dos efeitos com o modelo carreau).....	47
Tabela 5 - Vetor y com valores de LR ótima .....	48
Tabela 6 - Vetor y com valores de DR ótima.....	48

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	parâmetro do modelo de Carreau	[-]
$A$	área	[m <sup>2</sup> ]
$B_n$	número de Bingham	[-]
$D$	diâmetro	[m]
$D_1$	diâmetro do tubo principal	[m]
$D_2$	diâmetro dos tubos secundários	[m]
$D_R$	razão de diâmetro ótima	[-]
$E$	vetor cálculo dos efeitos	[-]
$f$	fator de atrito	[-]
$F_a$	força de arrasto	[N]
$K$	índice de consistência	[-]
$L$	comprimento	[m]
$L_1$	comprimento do tubo principal	[m]
$L_2$	comprimento dos tubos secundários	[m]
$L_R$	razão de comprimento ótima	[-]
$m$	parâmetro de ajuste de curva adimensional	[-]
$n$	índice de escoamento	[-]
$p$	pressão	[Pa]
$Q$	vazão volumétrica	[m <sup>3</sup> /s]
$R$	raio	[m]
$Re$	número de Reynolds	[-]
$\mathbf{u}$	vetor velocidade	[m/s]
$V$	volume	[m <sup>3</sup> ]

### Símbolos gregos

$\Delta p$	queda de pressão	[Pa]
$\dot{\gamma}$	taxa de cisalhamento	[s <sup>-1</sup> ]
$\eta$	viscosidade aparente	[Pa.s]
$\eta^*$	razão da viscosidade	[-]
$\eta'$	índice de comportamento aparente	[Pa.s]
$\eta_0$	Taxa de cisalhamento da viscosidade inicial	[Pa.s]

$\eta_{\infty}$	Taxa de cisalhamento da viscosidade infinita	[Pa.s]
$\Lambda$	parâmetro de ajuste de curva	[-]
$\lambda$	parâmetro da função de atrito	[-]
$\tilde{\lambda}$	número de Carreau	[-]
$\mu$	viscosidade absoluta (dinâmica)	[Pa.s]
$\rho$	massa específica	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\tau, \tau_{yx}$	tensão de cisalhamento	[Pa]
$\tau_0$	tensão de cisalhamento inicial	[Pa]
$\phi$	razão de aspecto da geometria	[-]

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>8</b>
1.1 DEFINIÇÃO DO TEMA.....	10
1.2 PROBLEMA .....	10
1.3 OBJETIVOS .....	11
<b>1.3.1 Objetivo Geral</b> .....	<b>11</b>
<b>1.3.2 Objetivos Específicos</b> .....	<b>11</b>
1.4 JUSTIFICATIVA .....	11
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>12</b>
2.1 DEFINIÇÃO DE UM FLUIDO NEWTONIANO.....	12
2.2 COMPORTAMENTOS CARACTERÍSTICOS DE FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS	13
2.3 FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS INDEPENDENTES DO TEMPO.....	14
<b>2.3.1 Plástico de Bingham</b> .....	<b>14</b>
<b>2.3.2 Fluidos Pseudoplásticos</b> .....	<b>15</b>
2.3.1.1 Modelos para Fluidos Pseudoplásticos .....	16
2.4 ESCOAMENTO DE FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS EM TUBOS .....	18
2.5 ESCOAMENTOS EM ESTRUTURAS DO TIPO ÁRVORE .....	19
<b>3 METODOLOGIA</b> .....	<b>25</b>
3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA A SER RESOLVIDO .....	25
3.2 MÉTODO ANALÍTICO .....	27
<b>3.2.1 Obtenção das funções de perda de carga</b> .....	<b>28</b>
<b>3.2.2 Obtenção das razões ótimas pelo método analítico</b> .....	<b>28</b>
3.3 MÉTODO APROXIMADO .....	29
3.4 VERIFICAÇÃO DOS EFEITOS – PLANEJAMENTO FATORIAL.....	30
3.5 MODELO BINGHAM .....	31
3.6 MODELO CARREAU .....	32
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....	<b>35</b>
4.1 FLUIDO NEWTONIANO.....	35
4.2 MODELO POWER-LAW .....	36
<b>4.2.1 Resolução das funções de perda de carga</b> .....	<b>36</b>
<b>4.2.2 Resolução da minimização da resistência e da razão de aspecto</b> .....	<b>42</b>
4.3 MODELO DE CARREAU .....	46
4.4 MODELO BINGHAM .....	52

<b>5 CONCLUSÕES .....</b>	<b>54</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>56</b>
<b>ANEXO A – ALGORITMO EES PARA O MODELO NEWTONIANO .....</b>	<b>59</b>
<b>ANEXO B – ALGORITMO EES PARA O MODELO DE CARREAU.....</b>	<b>60</b>
<b>ANEXO C - ALGORITMO EES PARA O MODELO DE BINGHAM .....</b>	<b>62</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A natureza, em sua amplitude, apresenta um comportamento determinístico e padronizado. O ser humano vem observando-a e refletindo desde a antiguidade, na qual a ciência ainda era mero potencial da pura reflexão filosófica. Na atualidade, a natureza continua a instigar e a ser questionada. Um dos padrões observado é a disposição que a natureza apresenta em forma de árvore para escoamentos dos mais variados tipos, conforme descrita pela Lei Construtal, teorizada por Adrian Bejan, em 1997. Nessa disposição, observa-se uma evolução dos sistemas de escoamento que é analisada e transcrita por modelo matemático, o que denomina-se Design Construtal. (ROCHA; LORENTE; BEJAN, 2017). O Design Construtal tem chamado a atenção, em especial da engenharia, a qual tem observado e pesquisado mais de perto os sistemas de escoamento bifurcados desses padrões tipo árvore.

Miguel e Rocha (2018) recentemente publicaram um livro no qual abordam sistemas de escoamento bifurcados, os quais têm sido amplamente estudados e desenvolvidos na engenharia, sobretudo na área da Mecânica de Fluidos. Esse fato se deve ao grande número de suas aplicações, que vão desde dispositivos industriais até as artérias de um ser humano. Essa última aplicação pode muito bem ser exemplificada pela Hemodinâmica, ou o estudo da dinâmica sanguínea, a qual demonstra consideráveis avanços na pesquisa de sistemas de escoamento bifurcados, haja vista que o sistema circulatório apresenta diversas bifurcações na sua configuração. Tanto num caso como no outro, bem como inúmeros outros sistemas de escoamento na natureza que se apresentam com o formato tipo árvore, ou mais especificadamente, bifurcados, se faz necessário o estudo de configurações que conduzam a uma melhor circulação do escoamento nesses formatos, visando assim uma melhor eficiência em suas aplicações.

Ainda no século XIX, trabalhos foram publicados abordando o estudo de sistemas de escoamento bifurcados, inclusive com aplicações à Hemodinâmica, como é o caso de Young (1809) e Jacobson (1860). (MIGUEL; ROCHA, 2018; THOMA, 1901). Esses trabalhos contribuíram significativamente para a formulação da razão de aspecto, por exemplo com a sugestão de Young da razão um sobre raiz cúbica de dois. (MIGUEL; ROCHA, 2018). Dessa forma, começa a ser configurada a razão de aspecto no início do século XX com o modelo de Hess-Murray, que é utilizado inclusive na atualidade. O modelo de Hess-Murray afirma que a melhor

maneira de otimizar o escoamento em dutos bifurcados é quando o cubo do diâmetro do duto principal é igual a soma dos cubos dos diâmetros dos secundários. Quando os dutos são simétricos, tem-se a razão  $2^{-1/3}$  entre os diâmetros do ramo principal e dos ramos secundários. (Lei de Hess-Murray). Como alternativos, outros modelos têm surgido, como é o caso do Design Construtal, que faz parte da Lei Construtal. Proposta por Bejan (1997), a Lei Construtal trata da evolução de sistemas finitos em que há escoamentos na direção de um sistema melhor. (SEHN, 2018).

Diversos estudos que abordam bifurcações já foram realizados. Entre os quais, cita-se Pepe (2018), que experimentou numericamente o modelo power-law com o método Design Construtal para uma geometria em forma de “T”; além de Sehn (2018), que analisou numericamente dutos em formato “Y” com diferentes ângulos, também utilizando o modelo power-law e o método Design Construtal. Observa-se que ambos estudaram bifurcações utilizando métodos numéricos com o modelo power-law, não havendo o uso de outros modelos para fluidos não newtonianos, como por exemplo o modelo de Carreau.

Fluidos não newtonianos podem ser analisados com diferentes modelos. O modelo power-law talvez tenha sido bastante utilizado por causa de sua acessível manipulação matemática. No entanto, o modelo power-law não é o mais eficiente dos modelos devido às suas limitações matemáticas. Nesse quesito, o modelo de Carreau é mais vantajoso, sendo que proporciona uma análise mais realista devido à complexidade de sua equação. Ainda, tratando-se de fluidos não newtonianos viscoplásticos, o modelo de Bingham é o modelo mais apropriado e vantajoso.

O presente trabalho visa ampliar e contribuir com o estudo de sistemas de escoamento bifurcados criando um modelo para o Design de bifurcações para o escoamento de fluidos não newtonianos pseudoplásticos e viscoplásticos. Emprega-se um método aproximado da literatura para a perda de carga destes fluidos em tubulações, e um método numérico de otimização.

Na revisão bibliográfica, dos subcapítulos 2.1 ao 2.3.1, são abordadas as definições de fluidos newtonianos e não newtonianos, bem como as classificações desse último. No subcapítulo 2.3.1.1 enfatiza-se os fluidos pseudoplásticos e seus modelos power-law e Carreau, sendo esses explicados e exemplificados. O subcapítulo seguinte, 2.4, complementa o anterior abordando sucintamente a perda

de carga para o modelo power-law. Concluindo a revisão bibliográfica, o subcapítulo 2.5 apresenta uma revisão do estado da arte descrevendo alguns dos principais e mais perceptíveis trabalhos publicados sobre o assunto deste trabalho. Nos resultados, é demonstrada a formulação do número de Reynolds pelo método analítico para o modelo power-law, baseado no gradiente da pressão bem como a formulação analítica, pelo modelo power-law, da razão de aspecto. Ainda nos resultados, são apresentados os valores ótimos (DR e LR ótimas) para o modelo de Carreau com uma série de combinações de valores diferentes para suas variáveis ( $\eta^*$ ,  $\tilde{\lambda}$  e  $n$ ), além de serem apresentados os valores ótimos para o modelo newtoniano e de Bingham.

## 1.1 DEFINIÇÃO DO TEMA

Bifurcações em dutos são comuns em projetos de engenharia. A questão da minimização da resistência ao escoamento instiga o desenvolvimento de uma base teórica para o design das mesmas, com melhor rendimento e aproveitamento energético. Dessa forma, surge o questionamento de qual seria o Design ótimo para minimizar a resistência ao escoamento de fluidos pseudoplásticos e viscoplásticos. O modelo power-law apresenta-se acessível devido a sua formulação analítica, no entanto modelos reológicos mais complexos não têm sido abordados pela literatura. Este trabalho utiliza os modelos de Carreau e Bingham para escoamento laminar de fluidos pseudoplásticos e viscoplásticos em um tubo em forma de T aplicando o Design Construtal.

## 1.2 PROBLEMA

O problema dessa dissertação gira em torno da minimização da resistência ao escoamento em bifurcações, investigando a influência dos parâmetros reológicos de fluidos pseudoplásticos e viscoplásticos nos efeitos de geometria.

## 1.3 OBJETIVOS

### 1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo do presente trabalho é avaliar o efeito dos parâmetros reológicos dos modelos power-law, de Carreau e de Bingham sobre as geometrias ótimas obtidas através do Método Design Construtal para bifurcações submetidas a escoamentos laminares.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são:

- a) Investigar a solução analítica para a resistência ao escoamento de um fluido power-law e comparar o resultado com o obtido com o modelo de Hess-Murray;
- b) Investigar soluções semi-analíticas da literatura para a perda de carga em tubos para fluidos pseudoplásticos e viscoplásticos;
- c) Construir um modelo para avaliação geométrica baseado no Design Construtal de bifurcações em forma de “T” para fluidos pseudoplásticos e viscoplásticos;
- d) Determinar o efeito de parâmetros reológicos dos modelos de fluidos não newtonianos nos resultados da otimização;
- e) Investigar as geometrias ótimas em função dos parâmetros reológicos de fluidos de Carreau e Bingham.

## 1.4 JUSTIFICATIVA

A justificativa para o presente trabalho é aumentar a base de conhecimento com relação a projetos de tubulações por onde escoam fluidos não newtonianos utilizando os métodos de Design Construtal, e quantificar os efeitos dos parâmetros reológicos nas soluções, obtendo assim estimativas úteis pra projeto e operação fazendo melhor uso da energia.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para uma melhor ambientação do problema cerne dessa dissertação, segue de forma sucinta uma definição do fluido envolvido e a apresentação dos modelos estudados, bem como uma breve exposição de alguns trabalhos já realizados nesse campo.

### 2.1 DEFINIÇÃO DE UM FLUIDO NEWTONIANO

Uma partícula de um fluido, comumente representada como um cubo, recebe forças (de atrito ou pressão) denominadas forças de superfície, as quais geram tensões (que são definidas como o quociente da força pela área). Essas forças podem ser decompostas em tensão normal ou tensão de cisalhamento. Dessa forma, em termos cartesianos, as forças exercidas sobre o cubo representativo geram uma matriz quadrada de ordem 3, sendo a sua diagonal principal formada pelas componentes de tensão normal, e os demais elementos pelas componentes da taxa de cisalhamento. (CHHABRA, 2010; ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

Em um fluido newtoniano a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação. Como diferentes fluidos possuem diferentes resistências ao movimento (ou seja, viscosidade), a taxa de deformação é multiplicada pela viscosidade, que é uma constante de proporcionalidade. Dessa forma, a tensão em um fluido newtoniano possui um crescimento linear. Podem ser citados como fluidos newtonianos o ar, a água e a gasolina em condições normais. (FOX; PRITCHARD; McDONALD, 2010).

Sendo assim, ao considerar-se uma camada de um fluido newtoniano entre dois planos paralelos a uma distância  $dy$  e uma força  $dF$  aplicada ao plano superior, a superfície de área  $dA$  irá se deslocar com uma velocidade  $du$ . Dessa forma, haverá uma tensão de cisalhamento  $\tau_{yx}$  aplicada à camada do fluido dada por:

$$\tau_{yx} \equiv \frac{dF}{dA} \quad (2.1)$$

Conclui-se ainda que há uma proporcionalidade entre tensão de cisalhamento e a velocidade de deslocamento do plano superior variando em relação à distância.

A equação que descreve essa proporção, característica de um fluido newtoniano, é dada como:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du_x}{dy} \quad (2.2)$$

sendo  $\mu$  a constante da viscosidade absoluta (ou também denominada dinâmica), que representa em termos matemáticos uma constante de proporcionalidade, e  $\frac{du}{dy}$  a taxa de deformação (que também pode ser escrita na forma  $\dot{\gamma}$ , a qual será usada a partir daqui). (BATCHELOR, 2009; FOX; PRITCHARD; McDONALD, 2010).

## 2.2 COMPORTAMENTOS CARACTERÍSTICOS DE FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS

Há uma quantidade considerável de fluidos classificados como não newtonianos, como amido de milho, tintas em geral, areia movediça, entre outros. Para cada tipo de comportamento não newtoniano, são encontrados diferentes modelos matemáticos na literatura, como por exemplo os modelos de Casson, Bingham, Herschel-Bulkey, entre outros, enquanto que o comportamento newtoniano é dado pelo modelo de Newton (Eq. (2.2)).

Dessa forma, pode-se afirmar que uma das característica que diferencia um fluido newtoniano de um não newtoniano é que, nesse último, a tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional à taxa de deformação. Percebe-se ainda que fluidos não newtonianos, em sua maioria, possuem comportamentos não lineares<sup>1</sup>. Há de se destacar aqui, principalmente, que num fluido não newtoniano a viscosidade não é constante, ao passo que para os fluidos newtonianos ela se apresenta constante (denominada de viscosidade aparente, que será melhor explicada no decorrer do trabalho), conforme descrito na Eq. (2.2). (BARNES, 2000).

Basicamente, os principais fluidos não newtonianos, de acordo com seus comportamentos reológicos, podem ser classificados como viscoelásticos, dependentes do tempo e independentes do tempo. Os dependentes do tempo, por sua vez, são divididos como reopéticos ou tixotrópicos, ao passo que os

---

<sup>1</sup> Vale lembrar aqui que o modelo do plástico de Bingham é uma equação linear cujo termo independente é diferente de zero.

independentes do tempo são classificados por terem ou não tensão de cisalhamento inicial.

### 2.3 FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS INDEPENDENTES DO TEMPO

São classificados como independentes do tempo os fluidos não newtonianos em que as relações reológicas não se alteram com o tempo da aplicação da tensão de cisalhamento. Quando não possuem tensão de cisalhamento inicial, são classificados como dilatantes ou pseudoplásticos (que são explicados no próximo subcapítulo).

Um fluido dilatante comporta-se de forma que, quanto maior a tensão exercida sobre ele, mais o fluido se solidifica. Por outro lado, quando a tensão é retirada (ou diminuída) a substância volta a se fluidizar. O fluido se torna praticamente um sólido devido à constância do volume e ao rápido aumento da viscosidade aparente para valores críticos da taxa de cisalhamento. Como exemplo comum de um fluido dilatante, pode-se citar a mistura de amido de milho com água. (NAKANISHI; NAGAIRO; MITARAI, 2012).

#### 2.3.1 Plástico de Bingham

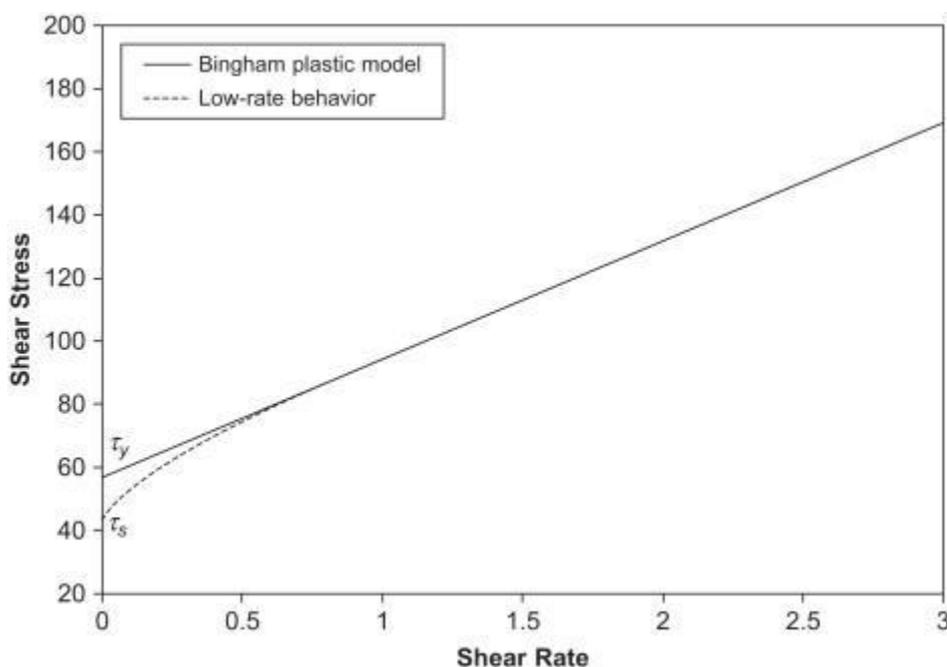
Fluidos que possuem tensão de cisalhamento inicial, a saber, plástico de Bingham (também chamado de plástico ideal) e Herschel-Bulkley, são fluidos que apresentam comportamento de um sólido para baixos valores da tensão de cisalhamento, a qual deve ser maior do que a tensão de cisalhamento inicial. Verifica-se isso com um olhar matemático à sua equação (descrita pela Eq. (2.3)).

De forma particular, o plástico de Bingham possui um comportamento linear, descrito pela equação:

$$\tau_{yx} = \tau_0 + \eta_p \dot{\gamma} \quad (2.3)$$

onde  $\tau_0$  é o valor da tensão de cisalhamento inicial e  $\eta_p$  é a viscosidade plástica (o comportamento da Eq. (2.3) pode ser melhor compreendido ao observar-se a Fig. 1). Fluidos como creme dental e lama de perfuração são exemplos de plástico de Bingham. (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010).

Figura 1 – Exemplo de gráfico do Modelo de Bingham comparando o seu crescimento linear ( $\tau_y$ ) com o comportamento de baixa taxa ( $\tau_s$ )



Fonte: Guo; Liu (2011, p.22).

Fluidos não newtonianos independentes do tempo que não possuem taxa de cisalhamento inicial são descritos pela equação geral:

$$\tau_{yx} = \eta \dot{\gamma} \quad (2.4)$$

onde  $\eta$  é a viscosidade aparente, que não é uma constante, como no caso do fluido newtoniano.

### 2.3.2 Fluidos Pseudoplásticos

Em um fluido pseudoplástico, a viscosidade aparente diminui conforme aumenta a taxa de deformação. Em outras palavras, esses fluidos apresentam um comportamento oposto aos dilatantes. Tintas e soluções de polímeros são alguns exemplos de fluidos pseudoplásticos. (ÇENGEL; CIMBALA, 2015).

A maioria dos fluidos não newtonianos são pseudoplásticos (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010) e a partir daqui são abordados somente a esses fluidos, objetivando alguns de seus principais modelos, foco desse trabalho. Além disso, não há um modelo geral para fluidos pseudoplásticos (o mesmo ocorre com

os dilatantes). No entanto, há diversos modelos matemáticos que pretendem descrever a esses fluidos. A seguir, serão tratados dois deles.

### 2.3.1.1 Modelos para Fluidos Pseudoplásticos

Este trabalho aborda os modelos power-law e Carreau para fluidos pseudoplásticos, através dos quais se pretende criar o modelo para a otimização da razão de aspecto de bifurcações. Power-law, por sua vez, é um modelo comumente usado para o estudo de fluidos pseudoplásticos, isso se autoexplica por sua semelhança com o modelo newtoniano, além da possibilidade do seu uso analítico. Por outro lado, o modelo de Carreau sobressai-se sobre power-law em alguns aspectos, como por exemplo possibilitar melhores previsões da viscosidade. (FAYED; SHEIKH; ILIEV, 2016).

Segundo Chhabra e Richardson (2008), o modelo power-law é descrito pela equação:

$$\tau_{yx} = K\dot{\gamma}^n \quad (2.5)$$

onde  $K$  é o índice de consistência, e  $n$  é o índice de escoamento.

Conforme dito acima, a viscosidade de um fluido não newtoniano não é constante, sendo chamada de viscosidade aparente. Para não haver problemas de sinais matemáticos entre a tensão e a taxa de cisalhamento, é comum reescrever a Eq. (2.5) distinguindo-se a viscosidade aparente de forma que:

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{K^n}{\dot{\gamma}} = K(\dot{\gamma}^{n-1}) \quad (2.6)$$

e substituindo na Eq. (2.4), tem-se que:

$$\tau_{yx} = \eta\dot{\gamma} = K(\dot{\gamma}^{n-1})\dot{\gamma} \quad (2.7)$$

O modelo de Carreau possui uma estrutura um pouco diferente do power-law, assemelhando-se mais significativamente com o modelo de Cross (BARNES, 2000),

sendo apenas alterada a potência do fator  $\Lambda\dot{\gamma}$  (do modelo de Cross). A equação do modelo de Carreau é então descrita como:

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \frac{1}{[(1 + \Lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{m}{2}}} \quad (2.8)$$

Sendo  $\eta_0$  a taxa de cisalhamento da viscosidade inicial e  $\eta_{\infty}$  a taxa de cisalhamento da viscosidade infinita. Colocando-se a equação para  $\eta$ , conforme Chhabra e Richardson (2008), tem-se que:

$$\eta = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty})[1 + (\Lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{m-1}{2}} \quad (2.9)$$

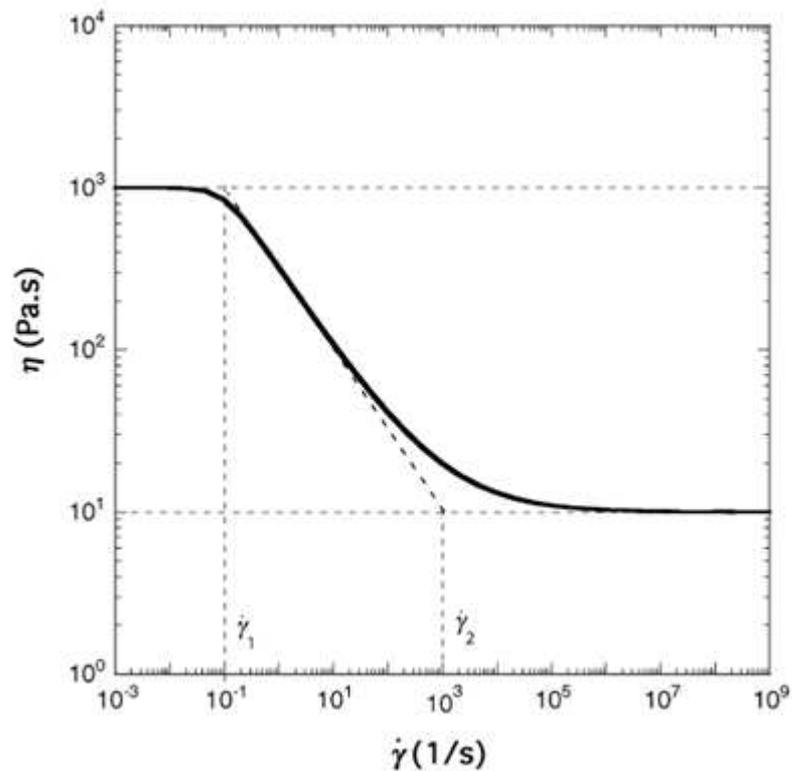
sendo  $\Lambda$  e  $m$  dois parâmetros de ajuste de curva adimensionais.

O modelo de Carreau possui uma curva característica. Na Fig. 2, há um exemplo de gráfico gerado a partir desse modelo para os valores  $\eta_0 = 1000$  Pa.s,  $\eta_{\infty} = 10$  Pa.s,  $\Lambda = 1$  e  $m = 0,5$ .

O modelo power-law não apresenta os patamares de viscosidade constante a baixa e a alta taxa de deformação. Assim, sua viscosidade tende ao infinito a baixas taxas e tende a zero a altas taxas, o que não é fisicamente realista. A vantagem do modelo de Carreau sobre o modelo power-law é justamente estes dois patamares, que o tornam semelhante ao comportamento real apresentado pelos fluidos pseudoplásticos, e mais atraente do ponto de vista computacional, pois computacionalmente é difícil lidar com modelos com viscosidade zero ou infinita.

Conforme pode-se visualizar na Fig. 2, há dois valores constantes em  $\eta$ , para  $\eta = 10^3$  e  $\eta = 10^1$  Pa.s, respectivamente, que limitam a imagem do gráfico. Observa-se ainda um decréscimo em meio a essa imagem no intervalo do domínio entre as proximidades de  $\dot{\gamma} = 10^{-1}$  e  $\dot{\gamma} = 10^3$  s<sup>-1</sup>.

Figura 2 - Comportamento da viscosidade aparente em função da taxa de deformação para o Modelo de Carreau



Fonte: De Souza Mendes, (2007, p.111).

## 2.4 ESCOAMENTO DE FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS EM TUBOS

Ao escoar por um duto, um fluido perde pressão devido ao atrito com as paredes do duto. Isso ocasiona a perda de carga, haja vista que o gradiente da pressão é diretamente proporcional ao fator de atrito. Com isso, havendo a ciência do fator de atrito, a queda de pressão pode ser estimada. (FAYED; SHEIKH; ILIEV, 2016).

Em um duto liso, ao contrário do que pareça, o fator de atrito depende apenas do número de Reynolds, não havendo dependência da rugosidade. (JOSEPH; YANG, 2010). Devido a essa dependência, há uma grande importância na relação  $f - Re$  (fator de atrito e número de Reynolds), a qual proporciona os parâmetros necessários para o conhecimento da perda de carga.

A principal aplicação da relação do gradiente de pressão com a vazão volumétrica ocorre no balanço da energia mecânica. Esse balanço auxilia a formulação da perda total de carga em um determinado duto. O atrito do fluido nas

paredes do duto ocasiona a perda total de carga, que por sua vez, implica na mudança da energia mecânica em energia térmica. (CHHABRA; RICHARDSON, 2008).

A literatura apresenta, principalmente, duas expressões da relação  $f - Re$  (expressa pela equação  $\lambda = f(Re)$ , ou mais comumente  $f = \frac{\lambda}{Re}$ ), a saber,  $\lambda = 16$  e  $\lambda = 64$ . O parâmetro de  $\lambda = 16$  foi proposto pelo trabalho de Metzner e Reed (1955), que relaciona o fator de atrito laminar com o número de Reynolds para fluidos newtonianos e não newtonianos independentes do tempo. (HALDENWANG; HOLM, 2012). No entanto, a equação de Darcy-Weisbach é considerada por muitos como o mais correto método para a avaliação de perdas de carga. (SAMADIANFARD, 2012). Essa equação remete ao parâmetro  $\lambda = 64$ .

Ambos os parâmetros descritos (bem como as respectivas equações que levam a esses resultados) são desenvolvidos para o modelo power-law na parte dos “resultados e discussão” desta dissertação.

## 2.5 ESCOAMENTOS EM ESTRUTURAS DO TIPO ÁRVORE

Estruturas em árvore são comumente observadas na natureza, seja nos galhos de uma árvore, nos afluentes de um rio, ou até mesmo em vegetais. Certas veias e artérias do sistema circulatório também possuem tais formas, podendo ser modeladas como estruturas do tipo árvore.

Na área médica, diversas pesquisas têm sido feitas dentro da Hemodinâmica e da Biomecânica. Através da otimização, simulação e modelagens, entre outros métodos da mecânica dos fluidos, cada vez mais procedimentos como stent e bypass vêm sendo estudados e aperfeiçoados. Em consequência, doenças cardiovasculares têm sido melhor compreendidas e, conseqüentemente, prevenidas devido a tais recursos e avanços que ocorrem nessa área. (MARSDEN, 2013). A otimização do escoamento sanguíneo tem sido amplamente usada, em especial para bifurcações do sistema circulatório, haja vista que vasos sanguíneos desse tipo são os mais vulneráveis. (DOUTEL *et al.*, 2018). Estudos dessa relevância acarretam no tratamento e precaução de determinadas enfermidades causadas por traumatismos venosos, tal como trombose.

Comumente, atribui-se que o estudo de bifurcações, em especial na Hemodinâmica, teve seus primórdios com Richard Thoma (1874-1957), o qual, num

artigo intitulado *Über den Verzweigungsmodus der Arterien*, de 1901, avaliou o escoamento sanguíneo em diferentes tipos de artérias. Ressalta-se aqui que Thoma partiu de estudos já realizados nesse campo, pois no artigo referido, cita o trabalho de Jacobson sobre as leis de Poiseuille sobre o diâmetro de dutos. (THOMA, 1901). Verifica-se com isso que já haviam estudos sobre a Hemodinâmica em meados de 1860.

Anterior a isso, não se pode deixar de citar que o físico Thomas Young (1773-1829) já realizara estudos na Hemodinâmica. Destaca-se aqui a proposta de Young para o fator de redução entre os diâmetros de dutos principal e secundário. A partir disso, o fisiologista suíço Walter Rudolf Hess (1881-1973) contribuiu significativamente para a Hemodinâmica, em especial no que toca à otimização da ramificação entre vasos principal e secundário. (MIGUEL; ROCHA, 2018).

Murray (1897-1935) estudou a otimização do diâmetro para uma melhor dissipação de energia. Dessa forma, constatou que o fluxo sanguíneo é proporcional ao diâmetro elevado à terceira potência, com uma constante proporcional resultante de uma expressão que envolve a viscosidade dinâmica e um coeficiente de metabolismo. (MIGUEL; ROCHA, 2018).

O modelo Hess-Murray desde então tem sido amplamente usado, sobretudo em trabalhos na área da Hemodinâmica. Atualmente, na pretensão de ampliar e aprimorar os estudos de bifurcações, desenvolveu-se outros modelos.

Huo e Kassab (2016) da mesma forma que Moussa et al. (2012), propuseram o modelo HK para bifurcações na Hemodinâmica. Moussa et al. (2012) estudou veias com bifurcações formato Y, como a artéria coronária epicárdica, através de simulação numérica. Comparando Murray e HK, chegou à conclusão que a otimização de bifurcações do tipo Murray não são tão eficientes quanto a do tipo HK, destacando-se a razão do diâmetro HK. (MOUSSA *et al.*, 2012). Como conseguinte, Huo e Kassab (2016) pesquisaram árvores vasculares e suas implicações fisiológicas, e também ressaltaram que, embora as bifurcações do tipo Murray sejam tradicionalmente vistas como otimizadas, as bifurcações HK apresentam padrões de escoamentos mais ideais. (HUO; KASSAB, 2016).

Se faz indispensável ao presente trabalho mencionar a pesquisa que Chan, Ding e Tu (2016) fizeram sobre o escoamento sanguíneo em estenose arterial. Embora a estenose não apresente estrutura tipo árvore, o método utilizado na pesquisa assemelha-se de forma significativa com esta dissertação. Através do

software ANSYS, foi simulado o escoamento com os modelos power-law e Carreau, e comparado com modelos de escoamento newtonianos. Com isso, foi observado que o escoamento sanguíneo em estenose arterial não difere significativamente entre os modelos newtonianos e o modelo de Carreau, ao passo que power-law apresentou menor tensão de cisalhamento na parede, sendo que esse modelo possui maior viscosidade na região do eixo de simetria. (CHAN; DING; TU, 2016). Karimi et al. (2014), estudando nove diferentes modelos não newtonianos para a simulação do escoamento sanguíneo na aorta, também observou que o modelo de Carreau, quando  $\eta_{\infty}$  com altas e  $\eta_0$  com baixas taxas de cisalhamento, demonstra comportamento semelhante aos fluidos newtonianos.

Por sua vez existe ainda, dentro da teoria dos fractais, linhas de pesquisa, sobretudo relacionadas à Hemodinâmica, que modelam o escoamento sanguíneo sob a ótica do conjunto de Mandelbrod. No entanto, esse assunto não será abordado neste trabalho a fim de não alongar-se em demasia.

Há ainda outros trabalhos a se considerar nessa área. Haldenwang et al. (2012) cita em sua pesquisa o desenvolvimento do fator de atrito e do número de Reynolds com diferentes modelos não newtonianos, além de analisar o modelo power-law composto. De forma semelhante, Joseph e Yang (2010) desenvolvem o fator de atrito e o número de Reynolds para o modelo power-law de forma numérica. Sayed e Shirani (2013) pesquisaram a otimização para bifurcação em Y usando a lei de Murray. Utilizando os modelos power-law e Carreau, eles fizeram simulação numérica com diferentes valores para o número de Reynolds chegando à conclusão de que um ângulo ótimo diminui consideravelmente a queda de pressão e a resistência do atrito. Fazendo uma considerável simulação numérica, Ponalagusamy (2012) também utilizou a lei de Murray para analisar bifurcações vasculares. Em sua pesquisa, simulou diferentes modelos não newtonianos para o escoamento de sangue.

O Design Construtal aborda longa e detalhadamente as estruturas do tipo árvore, tão comuns na natureza. Segundo essa teoria, uma rede de escoamento como estrutura do tipo árvore é a melhor maneira de interligar um ponto a uma multiplicidade de pontos (MIGUEL; ROCHA, 2018). Obviamente, a teoria que tem Adrian Bejan como seu principal divulgador objetiva facilitar a visão científica da referida padronização natural, bem como o estudo e a pesquisa acerca dela.

De acordo com a Teoria Construtal, a natureza tende a evoluir com estruturas do tipo árvore; isso se autoexplica devido ao fato desse tipo de estrutura facilitar o movimento dos escoamentos. (BEJAN; ZANE, 2013). Assim, é do interesse deste trabalho o método pelo qual o Design Construtal aborda o estudo de bifurcações em dutos, pois visa uma melhor otimização do escoamento dos mesmos.

Percebe-se um exemplo de aplicação da Teoria Construtal no trabalho de Liu e Li (2013), os quais, visando à otimização para dispositivos industriais, pesquisaram a razão de aspecto para a distribuição de escoamento de fluido monofásico em diversos canais uniformemente. Sob a ótica Design Construtal e usando a razão  $f_{ri} = \frac{f_i}{c_i}$  (comprimento sobre diâmetro), abordaram bifurcações que aumentam exponencialmente (na base 2) com diferentes geometrias (retangular, sextavado e circular). Tal pesquisa verificou que, conforme aumenta o número de Reynolds, mais difícil se torna a uniformidade do escoamento. Além disso, conclui que árvores retangulares sobressaem-se sobre as circulares, pois favorecem mais o escoamento do fluido pela árvore. (LIU; LI, 2013).

A pesquisa em aplicações da Teoria Construtal em bifurcações tem se expandido. Recentemente, outras dissertações tem sido escritas nesse campo. Sehn (2018) dissertou sobre tal aplicação ao formato Y. Nesse trabalho, foram analisadas diferentes relações geométricas e ângulos com o software Ansys Fluent, além de serem comparadas as teorias Hess-Murray com a Construtal. De forma similar, a dissertação de Pepe (2018) abordou o formato T. Para tanto, resolveu o modelo power-law de forma numérica (o que difere da presente dissertação, que aborda de forma analítica).

Ainda fazendo uso da Teoria Construtal, Ghaedamini, Salimpour e Mujumdar (2011) resolvem, por simulação numérica, a razão de aspecto para bifurcações com o modelo power-law, dessa forma chegando a um ângulo ótimo. Além disso, é notável a pesquisa de Li et al. (2014) em dissipadores de calor de microcanais, na qual percebe-se a aplicação da Teoria Construtal à otimização da transferência de calor e queda de pressão em aletas com bifurcação de formato Y.

Este trabalho objetiva dar continuidade à pesquisa de bifurcações, sobretudo sob a ótica do método Design Construtal. Para tanto, pretende-se criar uma correlação para a perda de carga de fluidos não newtonianos pseudoplásticos, sobretudo para o modelo Carreau, haja vista que o modelo power-law é

demonstrado de forma analítica. Tal correlação será aplicada na minimização da queda de pressão em bifurcações e comparada com os resultados já atingidos pela literatura. Objetiva-se dessa forma contribuir para o avanço das pesquisas realizadas nesse campo.

## 2.6 MODELAGEM PARA MINIMIZAR A RESISTÊNCIA AO ESCOAMENTO DE UM FLUIDO NEWTONIANO

Miguel e Rocha (2018) deduzem a minimização para um sistema de ramificação sob escoamento laminar e turbulento de um fluido newtoniano a partir da teoria construtal. Para tanto, levam em consideração uma vazão que passa por dutos cilíndricos em forma de T e Y. Sua dedução matemática, então, parte da equação de Hagen-Poiseuille (Eq. 2.10), pois o escoamento laminar é descrito por ela.

$$\frac{\Delta p}{\dot{m}} = \frac{128\nu L}{\pi D^4} \quad (2.10)$$

Com esse tipo de configuração, o escoamento do fluido pode ser comparado à corrente elétrica através de resistores, e sendo assim a equação é rearranjada como uma equação de resistência total de entrada e saída. Dessa forma,  $\Delta p/\dot{m}$  é equivalente à resistência de escoamento, L e D são substituídos pelos comprimentos e diâmetros do ramo principal e dos ramos secundários, respectivamente, gerando a equação da resistência total (Eq. 2.11).

$$R = \frac{128\nu}{\pi} \left( \frac{L_M}{D_M^4} + \frac{L_F}{D_F^4} \right) \quad (2.11)$$

Como as resistências do escoamento do fluido não podem ser minimizadas arbitrariamente e individualmente, o espaço disponível é fixado. Pois quanto maior for o acesso para o escoamento, menor será a resistência. Então, a equação da resistência total é reajustada levando em consideração o volume e a área totais ocupados (Eq. 4.36 e 4.37), resultando em:

$$R = \frac{128v}{\pi} \left[ \frac{L_1}{x^2} + \frac{L_2}{2(a-bx)^2} \right] \quad (2.12)$$

Após resolver algumas derivadas, eles chegam à razão clássica da lei de Hess-Murray (razão do ramo secundário sobre o ramo principal igual à  $2^{-1/3}$ ), tanto para a razão entre os diâmetros, quanto à razão para os comprimentos.

### 3 METODOLOGIA

Para analisar o Design de bifurcações para escoamentos de fluidos não newtonianos, foram utilizados o método de Design Construtal e o método aproximado, além de soluções analíticas para a perda de carga de fluidos não newtonianos, conforme descreve-se a seguir.

#### 3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA A SER RESOLVIDO

O problema do trabalho consta em encontrar valores ótimos para a razão de aspecto de bifurcações para minimizar a resistência ao escoamento de fluidos não newtonianos. A bifurcação em questão é no formato “T” e os parâmetros analisados foram:

$$DR = \frac{D_2}{D_1} \quad (3.1)$$

$$LR = \frac{L_2}{L_1} \quad (3.2)$$

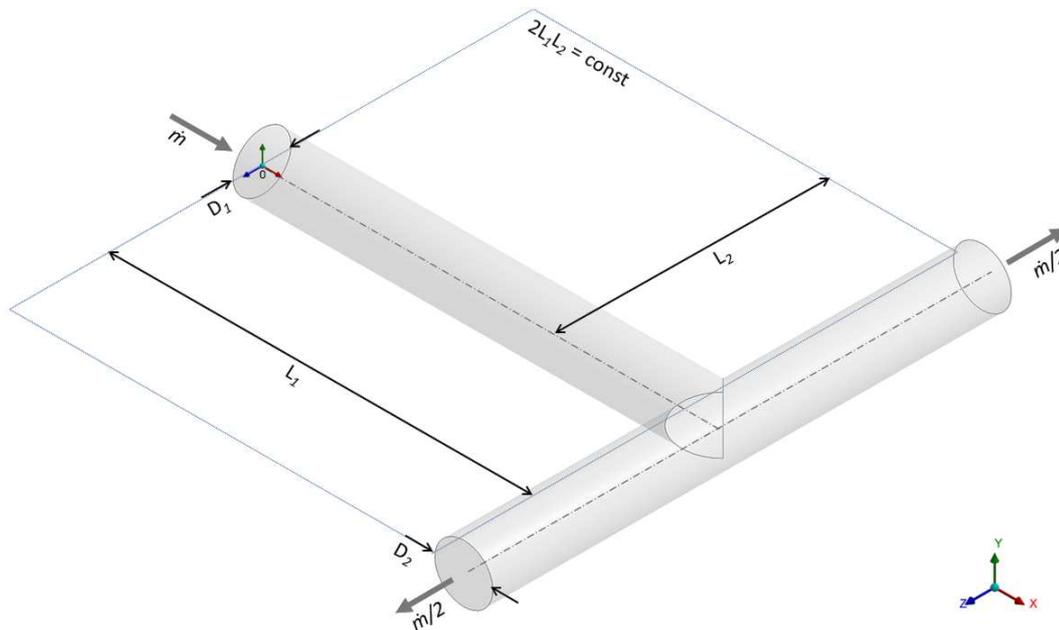
Sendo DR a razão de diâmetro ótima e LR a razão de comprimento ótima,  $D_2$  o diâmetro dos ramos secundários e  $L_2$  o comprimento dos ramos secundários,  $D_1$  o diâmetro do ramo principal e  $L_1$  o comprimento do ramo principal.

Na Fig. 3, pode-se visualizar a geometria que envolve o cerne desta dissertação e suas respectivas dimensões. Em  $D_1$  visualiza-se a entrada, ao passo que  $D_2$  representa a saída do escoamento.  $L_1$  e  $L_2$  representam os comprimentos da geometria. Algumas bibliografias denominam “pai e filhos” ou “mãe e filhas”, no entanto, nesta dissertação optou-se pelos termos ramo principal e ramos secundários.

Os valores procurados são as razões  $D_2/D_1$  e  $L_2/L_1$  ótimas que possibilitem a mínima resistência ao escoamento. Para fluidos newtonianos, a Lei de Hess-Murray determina o valor  $2^{-1/3}$  (conforme já comentado). Neste trabalho, buscou-se as razões DR e LR ótimas para fluidos não newtonianos, sendo que o modelo power-

law foi resolvido por método analítico, e os modelos de Carreau e de Bingham foram resolvidos por método numérico.

Figura 3 - Estrutura da geometria



Fonte: Pepe (2018, f. 13).

A presente análise possui uma limitação: considera-se apenas o escoamento plenamente desenvolvido ao longo dos tubos principal e secundários que compõe as geometrias. Ou seja, não se considera a perda de carga localizada na bifurcação. Esta abordagem foi utilizada para a obtenção da razão ótima de Hess-Murray. Trabalhos mais recentes (como Pepe (2018), Sehn (2018), entre outros), utilizando simulação computacional tridimensional, consideram a perda de carga localizada na bifurcação. Nesta dissertação, somente são usadas funções para a perda de carga em trechos de escoamento plenamente desenvolvido em tubulações.

As variações da geometria são restringidas pelo parâmetro  $\phi$  (fi). Considerando-se os diâmetros dados e a área ocupada pela geometria por  $L_1$  e  $2.L_2$  (Eq. (3.3)), tem-se um paralelepípedo circunscrito à geometria, o qual fornece o volume total (dado pela Eq.(3.4)). O parâmetro  $\phi$  é a razão entre o volume dos tubos (ramo principal e ramos secundários) e o volume total (Eq. (3.5)).

$$A = 2L_2L_1 = constante \quad (3.3)$$

$$V = \frac{\pi}{4} (D_1^2 L_1 + 2D_2^2 L_2) = \text{constante} \quad (3.4)$$

$$\phi = \frac{V_{tubos}}{V_{total}} \quad (3.5)$$

Para o estabelecimento dos parâmetros de projeto, graus de liberdade e restrições do problema, foi utilizado o método Design Construtal conforme sugerido por Rocha, Lorente e Bejan (2017) e Dos Santos et al. (2017), o qual é sumarizado no fluxograma da Fig. 4.

Figura 4 - Passos para aplicação do Método Design Construtal

<p><b>Passo 1:</b> Definir precisamente o sistema de escoamento em análise.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Bifurcação em forma de T através da qual escoa um fluido, proveniente do tubo principal.</li> </ul>
<p><b>Passo 2:</b> Identificar o que esco.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Fluido não newtoniano.</li> </ul>
<p><b>Passo 3:</b> Identificar o significado de prover melhor acesso (facilitar o escoamento) para o problema físico em questão.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ A resistência ao escoamento deve ser a menor possível.</li> </ul>
<p><b>Passo 4:</b> Identificar as restrições do problema.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Volume total e volume de tubos.</li> </ul>
<p><b>Passo 5:</b> Identificar os graus de liberdade do sistema.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Razão de diâmetros e razão de comprimentos entre os tubos secundários e principal.</li> </ul>
<p><b>Passo 6:</b> Solução do problema físico para calcular o indicador de desempenho.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Soluções analíticas e semi-analíticas para a perda de carga em tubos para fluidos não newtonianos.</li> </ul>
<p><b>Passo 7:</b> Escolha de um algoritmo de otimização para realizar a busca pelas geometrias ótimas.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Algoritmo do EES, buscando pela razão de diâmetros e razão de comprimentos ótimos.</li> </ul>

Fonte: Adaptado de Rocha, Lorente e Bejan (2017).

### 3.2 MÉTODO ANALÍTICO

Para o Design Construtal do sistema para o escoamento de fluidos power-law, utilizou-se a solução analítica para perda de carga para estes fluidos, a qual está disponível em diversas literaturas, como o livro de Chhabra e Richardson (2008). Utilizou-se as funções de perda de carga para chegar-se à expressão geral da

minimização da resistência. Após, tal expressão geral foi utilizada para encontrar a razão de aspecto geral para o modelo power-law, tanto para o comprimento (LR) quanto para o diâmetro (DR).

### **3.2.1 Obtenção das funções de perda de carga**

Foi de considerável importância desenvolver as funções de perda de carga dos fluidos dentro do contexto dessa dissertação. Mesmo que haja literatura abordando o tema em questão, pretendeu-se ampliar esses trabalhos com o desenvolvimento das funções de forma mais detalhada.

A literatura já apresenta a obtenção das funções de perda de carga de forma analítica para o modelo newtoniano e para o modelo power-law. No entanto, em especial para o modelo power-law, o faz de forma bastante resumida. Por isso, nesta dissertação, pretendeu-se obter as funções de perda de carga para o modelo power-law de forma ampla e detalhada.

Para obter as funções de perda de carga para o modelo power-law, utilizou-se como referência a resolução de Chhabra e Richardson (2008), que, partindo da definição de Hagen-Poiseuille, chega ao parâmetro  $\lambda = 16$  do fator de atrito de Metzner-Reed. Essa resolução foi melhor detalhada neste trabalho. Além disso, demonstrou-se nesta dissertação uma resolução semelhante para o fator de atrito de Darcy, o qual apresenta o parâmetro  $\lambda = 64$ .

A expressão geral da queda de pressão ( $\Delta p$ ) e o parâmetro  $\lambda$  foram utilizados para encontrar a expressão geral a minimização da resistência.

### **3.2.2 Obtenção das razões ótimas pelo método analítico**

O método analítico foi utilizado tendo como referência os trabalhos de Miguel (2016) e de Miguel e Rocha (2018). Miguel (2016) resolve as razões ótimas com o modelo power-law para bifurcações em formato "Y". Nesta dissertação, chegou-se à mesma resolução encontrada por ele, porém para um formato T. Ainda, Miguel e Rocha (2018) resolvem para o modelo newtoniano (para o qual vale a razão de Hess-Murray, e considera-se o índice de escoamento constante, ou seja,  $n = 1$ ). Essa resolução foi de considerável auxílio para o resultado obtido. Mesmo que no

modelo power-law o índice de escoamento ( $n$ ) seja variável, quando fixado em  $n = 1$ , o resultado encontrado é igual à razão de Hess-Murray para o modelo newtoniano.

### 3.3 MÉTODO APROXIMADO

Tal como descrito antes, os modelos newtoniano e power-law podem ser solucionados de forma puramente analítica. Porém, a mesma forma de solução não cabe a determinados modelos, como são os casos dos modelos de Carreau e de Bingham. Todavia, existem métodos na literatura que auxiliam o estudo desses fluidos. Esta dissertação utilizou o método aproximado do trabalho de Cruz, Coelho e Alves (2012).

O método aproximado é uma solução analítica que é fundamentada principalmente nos resultados obtidos pelo trabalho de Metzner e Reed (1955), o qual contribuiu generosamente com seu estudo sobre o modelo power-law. O método parte da derivação da Eq. (2.6), que resulta na equação:

$$\frac{d\eta}{d\dot{\gamma}} = \tau(n - 1)\dot{\gamma}^{-2} \quad (3.6)$$

Após, a solução isola o parâmetro  $n$ , renomeando-o como índice de comportamento aparente ( $\eta'$ ), o que resulta em:

$$\eta' = \frac{d\eta/d\dot{\gamma}}{\tau\dot{\gamma}^{-2}} + 1 \quad (3.7)$$

Então, substituindo as Eq. (2.6) e (2.7) na Eq. (3.7), chega-se à equação:

$$\eta' = \frac{d\eta/d\dot{\gamma}}{\eta/\dot{\gamma}} + 1 \quad (3.8)$$

A partir da Eq. (3.8), o método apresentado pode resolver diversos modelos para  $\eta'$ , desde que possa ser manipulada matematicamente e ficar em função da viscosidade aparente ( $\eta$ ) do respectivo modelo. Ou seja, o método aproximado consta em pegar um modelo reológico (seja de Carreau, de Bingham, etc.) que esteja em função da viscosidade aparente e substituir na Eq. (3.8).

Estes modelos foram implementados no software EES (Engineering Equation Solution), sendo utilizado o algoritmo de otimização do EES para a obtenção dos valores ótimos de DR e LR. DR e LR ótimas podem ser definidos como a razão do comprimento e do diâmetro de bifurcações, que minimiza a resistência ao escoamento (o que remete à Lei de Hess-Murray, descrita anteriormente).

### 3.4 VERIFICAÇÃO DOS EFEITOS – PLANEJAMENTO FATORIAL

Para a verificação do efeito dos parâmetros reológicos na geometria ótima obtida, utilizou-se a técnica de “planejamento fatorial em dois níveis” de conformidade com o método de Neto, Scarminio e Bruns (2001), que consta no estudo de uma função com múltiplas variáveis, e pelo qual investiga-se a influência de cada variável nos resultados obtidos.

O planejamento fatorial é dado pela expressão  $2^k$ , sendo  $k$  o número de variáveis que influenciam a função. Então é feita uma tabela de combinações, na qual pode-se estimar o nível de interferência de cada variável, bem como seus rendimentos e erros. Neste trabalho, o planejamento fatorial foi utilizado para calcular os máximos e mínimos da resistência ao escoamento dos fluidos. Dessa forma, a tabela foi elaborada com os máximos e mínimos de cada variável.

Para um planejamento com duas variáveis, o cálculo dos efeitos é simples e direto, sendo nada mais do que uma média calculada com o rendimento de cada uma das combinações. Por outro lado, quando existem três ou mais variáveis, há a necessidade de algumas manipulações matriciais.

Nesta dissertação, utilizou-se a simulação por planejamento fatorial previamente para o modelo newtoniano (para o qual utilizou-se o planejamento fatorial  $2^2$ ), Bingham (planejamento  $2^1$ ), e principalmente para o modelo de Carreau (planejamento  $2^3$ ).

Conforme dito, um planejamento para três variáveis alonga-se um pouco mais do que para duas. A tabela de combinações se torna uma grade matricial, sendo ampliada de forma que fique quadrada (ou seja, uma matriz  $8 \times 8$ ). Considerando que há três variáveis a serem analisadas, o planejamento fatorial resulta em oito combinações ( $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ), e nisso se dão as oito linhas da matriz. As colunas da matriz são formadas pelas partes do conjunto das variáveis (acrescentando-se uma coluna denominada média), somando assim oito colunas (lembrando que o conceito

de conjunto das partes consta em um conjunto com todos os subconjuntos possíveis de um conjunto. O número de subconjuntos de um conjunto é dado por  $2^k$ , sendo  $k$  o número de elementos do conjunto. Então, para um conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$ , por exemplo, o conjunto das partes é dado por  $P(A) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ , pois  $A$  possui três elementos, ou seja  $2^3$  partes).

Os elementos da matriz são apenas descritos como 1 e -1, que representam os valores máximos e mínimos das variáveis. Um vetor coluna é montado com os oito resultados obtidos através do software EES, e então realiza-se o seguinte cálculo matricial:

$$E = X^t \cdot y \quad (3.9)$$

Sendo  $E$  o vetor com os resultados do cálculo dos efeitos,  $X^t$  a transposta da matriz das variáveis, e  $y$  o vetor coluna (foram calculados dois vetores  $y$ : um para DR e outro para LR). Após, o primeiro elemento do vetor  $E$  é dividido por oito, e os demais elementos divididos por quatro.

Após o planejamento fatorial, foram elaboradas tabelas de simulações com diferentes valores para cada variável dos modelos em questão (Carreau e Bingham, além do modelo newtoniano). Essas tabelas foram realizadas com o auxílio do software EES (usando algoritmos específicos elaborados para os modelos, anexos nesta dissertação) com a função “Min/Max”, a qual encontra os valores ótimos (máximo e mínimo, ou seja, DR e LR, como é o caso deste trabalho) de acordo com a alternância de cada variável. Os algoritmos contêm as variáveis necessárias conforme o planejamento fatorial previsto, a saber:  $\phi$  e  $Re$  para o modelo newtoniano,  $\eta^*$ ,  $\tilde{\lambda}$  e  $n$  para o modelo de Carreau, e  $Bn$  para o modelo de Bingham.

Para a construção das tabelas, as variáveis foram sendo alternadas com diferentes valores em determinados intervalos (de acordo com o modelo), sendo encontrados seus DR e LR ótimas.

### 3.5 MODELO BINGHAM

Para aplicar-se o método da aproximação no modelo de Bingham, a Eq. (2.3) é manipulada para ficar em função da viscosidade aparente, resultando em:

$$\eta = \mu_{\infty} + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} \quad (3.10)$$

Substituindo a Eq. (3.10) em (3.8), chega-se ao índice de comportamento aparente para o modelo de Bingham, dado pela Eq. (3.11):

$$\eta' = 1 - \frac{\tau_0}{\mu_{\infty}\dot{\gamma} + \tau_0} \quad (3.11)$$

Observa-se que este modelo possui apenas um efeito de parâmetro, o número de Bingham ( $Bn$ ). Devido a isso, as simulações do EES foram mais simples, não necessitando de um planejamento fatorial.

### 3.6 MODELO CARREAU

Os parâmetros adimensionais envolvidos no problema foram  $Re$ ,  $f$ ,  $n$ ,  $\eta^*$  e  $\tilde{\lambda}$  (número de Reynolds, fator de atrito, índice  $n$ , viscosidade dinâmica e número de Carreau, respectivamente). O método aproximado, bem como as simulações do EES, foram realizados com o modelo reológico de Carreau-Yasuda, que é descrito matematicamente por:

$$\eta = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty})[1 + (\Lambda\dot{\gamma})^a]^{(n-1)/a} \quad (3.12)$$

Pode-se perceber que a Eq. (3.12) é a mesma Eq. (2.9), porém aqui encontra-se a constante  $a$  (característica do modelo de Carreau-Yasuda) ao invés do número dois.

A Eq. (3.12) já está em função da viscosidade aparente, não havendo necessidade de alguma manipulação matemática. Por isso, para aplicar o método, a Eq. (3.12) pode ser diretamente substituída na Eq. (3.8), o que resulta em:

$$\eta' = 1 + \frac{(\mu_0 - \mu_{\infty})(n-1)[1 + (\Lambda\dot{\gamma})^a]^{(n-1-a)/a}(\Lambda\dot{\gamma})^a}{\mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty})[1 + (\Lambda\dot{\gamma})^a]^{(n-1)/a}} \quad (3.13)$$

O modelo de Carreau é o modelo mais complexo dos utilizados neste trabalho e, por isso, necessitou de um planejamento fatorial  $2^3$ , devido às suas variáveis  $\eta^*$ ,  $\tilde{\lambda}$  e  $n$ , e conseqüentemente simulações do EES mais extensas.

### 3.7 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

O problema de otimização a ser resolvido para os diferentes fluidos consiste na minimização da resistência ao escoamento em uma bifurcação em forma de T, para a qual são considerados modelos de perda de carga em escoamento plenamente desenvolvido. O problema de otimização pode ser sumarizado como:

Problema de otimização: Minimizar a resistência ao escoamento em uma bifurcação em forma de T:

$$R_{min} \quad (3.14)$$

Onde:

$$R = \frac{\Delta p}{\dot{m}} \quad (3.15)$$

Parâmetros de projeto: razão de diâmetros entre tubos principal e secundários, e razão de comprimento entre tubos principal e secundários, que são dadas pelas Eq. (3.1) e (3.2).

Restrições: razão entre o volume de tubos e o volume total da geometria (conforme Eq.(3.5)).

Este problema foi resolvido para diferentes números de Reynolds e modelos reológicos conforme supracitados.

#### 3.7.1 Algoritmo de otimização

Foi utilizado o método de otimização "Variable metric method" com a função "min/max" do software EES para os modelos de Carreau e de Bingham. Foram setados o número máximo de iterações igual à 400, e critério de convergência do método de erro relativo máximo igual à  $10^{-4}$ . Foi definida a minimização da variável

resistência ao escoamento total (resistência ao escoamento dos tubos principal e secundários), e os parâmetros de projeto a razão de diâmetros (DR) e a razão de comprimentos (LR).

De acordo com o software EES (2020):

O método de otimização métrica variável (Variable metric method) é basicamente uma versão multidimensional do método Aproximações Quadráticas (Quadratic Approximations). A ideia básica é ajustar a função objetivo a uma função quadrática de todas as variáveis independentes. A função quadrática é então diferenciada e definida como zero para localizar um novo ponto de teste. Um algoritmo para o método Métrica Variável é apresentado em Numerical Recipes, de Press et al., Cambridge University Press, 1989. O método requer necessariamente derivadas numéricas. De fato, são necessárias segundas derivadas (a matriz de Hessian) que podem causar problemas em algumas circunstâncias quando as equações não são resolvidas com tolerâncias rigorosas. Como no método de Aproximações Quadráticas, quando o método Variável Métrica funciona, ele funciona bem e geralmente é mais eficiente que a implementação do método Direções Conjugadas (Conjugate Directions) no EES.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo apresenta-se toda a otimização analítica baseada no Método Design Construtal para o escoamento de um fluido power-law em uma bifurcação em T. Para o escoamento de fluidos modelos Carreau e Bingham, a otimização é realizada numericamente, utilizando o algoritmo "Variable metric method" do software EES, e as funções de perda de carga são baseadas na solução aproximada de Alves, Coelho e Cruz (2012). Também é investigado o efeito dos parâmetros reológicos do modelo de Carreau nos resultados da otimização, utilizando o planejamento fatorial em dois níveis. Uma análise numérica para o fluido newtoniano também é apresentada.

### 4.1 FLUIDO NEWTONIANO

Para calcular a minimização da resistência ao escoamento de fluido newtoniano, foi realizado o planejamento fatorial  $2^2$ . Como variáveis de projeto foram utilizadas o número de Reynolds e a razão de volumes  $\phi$  (fi). Foi analisado o efeito destas variáveis no resultado da razão de diâmetros e da razão de comprimentos ótimas, isto é, aquelas que proporcionaram menor resistência ao escoamento.

Inicialmente, estabeleceu-se 0,05 e 0,15, como os níveis de análise, para a variável  $\phi$ ; e 100 e 300 os níveis da variável número de Reynolds. Com o auxílio do software EES e aplicando-se o planejamento fatorial, obteve-se os valores apresentados na tabela 1 para DR e LR ótimas.

Tabela 1 - Valores obtidos com modelo newtoniano (intervalo menor)

Fi	Re	DR	LR
0,05	100	0,7647	0,684
0,05	300	0,7647	0,684
0,15	100	0,7646	0,6838
0,15	300	0,7646	0,6838

Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebeu-se então que a variável Reynolds não altera os resultados, pois observa-se na tabela 1 que a variação de Reynolds (100 para o mínimo e 300 para o

máximo) não altera os resultados ótimos DR e LR. Além disso, ao aplicar-se os resultados ao cálculo de efeitos obtém-se um resultado nulo.

Ao aumentar o intervalo de variação, não houve mudanças quanto à interferência da variável Reynolds, conforme observa-se na tabela 2.

Tabela 2 - Valores obtidos com modelo newtoniano (intervalo maior)

Fi	Re	DR	LR
0,1	100	0,7647	0,684
0,1	300	0,7647	0,684
0,3	100	0,7646	0,6838
0,3	300	0,7646	0,6838

Fonte: Elaborado pelo autor.

Se a variável Reynolds não interfere nos resultados, tem-se portanto um fatorial 2<sup>1</sup>, e por isso obteve-se um efeito nulo. Com isso, conclui-se que o ótimo para a razão de diâmetros DR e para a razão de comprimentos, LR, independe do número de Reynolds ou da razão de volumes. Esta é uma consequência da modelagem que somente leva em conta a perda de carga distribuída.

## 4.2 MODELO POWER-LAW

De princípio, se faz necessário formular o número de Reynolds para tais modelos. O modelo geral power-law (ou também denominado Oswald de Waele) é descrito pela Eq. (2.5).

### 4.2.1 Resolução das funções de perda de carga

Partindo disso, o número de Reynolds para esse modelo é formulado de acordo com o seguinte:

Supondo um cilindro reto e uma partícula em um determinado setor circular, sabe-se que há algumas forças atuando em forma de pressão sobre a partícula. No sentido da direita para esquerda, a pressão pode ser equacionada como:

$$p(\pi r^2) - (p + \Delta p)\pi r^2 = \tau_{rz}2\pi rL \quad (4.1)$$

Sendo  $p$  a pressão,  $L$  o comprimento do duto e  $r$  e  $z$  as variáveis nas direções do raio e do comprimento, respectivamente. Observa-se aqui que o tensor  $\tau_{yx}$  será desenvolvido por em coordenadas cilíndricas ( $\tau_{rz}$ ).

Aplicando as devidas propriedades, pode-se simplificar a equação e isola-se o tensor, de forma que:

$$\tau_{rz} = -\frac{\Delta p}{L} \frac{r}{2} \quad (4.2)$$

Pela Eq. (2.5), substitui-se o tensor em (4.2), de forma que:

$$k \frac{du_z^n}{dr} = -\frac{\Delta p}{L} \frac{r}{2} \quad (4.3)$$

Sendo  $u_z$  a velocidade radial. Decorre então que:

$$\frac{du_z}{dr} = \left(-\frac{\Delta p}{kL}\right)^{1/n} \left(\frac{r}{2}\right)^{1/n} \quad (4.4)$$

$$\int du_z = \int \left(-\frac{\Delta p}{kL}\right)^{1/n} \left(\frac{r}{2}\right)^{1/n} dr \quad (4.5)$$

$$u_z = -\left(\frac{n}{n+1}\right) \left[ \left(-\frac{\Delta p}{L}\right) \frac{1}{2k} \right]^{1/n} r^{\frac{(n+1)}{n}} + C \quad (4.6)$$

Segundo Chhabra e Richardson (2008), nas paredes do duto a velocidade deve ser nula, a fim de satisfazer a condição de não deslizamento. Portanto, considera-se que quando  $r = R$ , tem-se  $u = 0$ . Substituindo a Eq. (4.6), encontra-se:

$$C = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[ \left(-\frac{\Delta p}{L}\right) \frac{1}{2k} \right]^{1/n} R^{\frac{(n+1)}{n}} \quad (4.7)$$

Por (4.6) e (4.7), decorre a distribuição de velocidade:

$$u_z = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[ \left(-\frac{\Delta p}{kL}\right) \frac{R}{2} \right]^{1/n} R \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{(n+1)}{n}} \right] \quad (4.8)$$

Considerando-se o escoamento no centro da área circular, ou seja,  $y = 0$ , tem-se a velocidade máxima, dada por:

$$\mathbf{u}_{m\acute{a}x} = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[ \left(-\frac{\Delta p}{kL}\right) \frac{R^2}{2} \right]^{1/n} R \quad (4.9)$$

Por outro lado, deve-se considerar que, numa seção transversal, devido à aderência do fluido na superfície, a velocidade não possui comportamento uniforme, havendo considerável variação das paredes ao centro do duto. (ÇENGEL; BOLES, 2013). Dessa forma, define-se que:

$$\mathbf{u}_{méd} = \frac{Q}{A} \quad (4.10)$$

Sendo  $Q$  a vazão volumétrica e  $A$  a área da seção transversal. A vazão volumétrica também é definida como:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathbf{u}_z r dr d\theta = 2\pi \int_0^R \mathbf{u}_z r dr \quad (4.11)$$

Substituindo  $\mathbf{u}_z$  por (4.8), tem-se que:

$$Q = 2\pi \int_0^R \left\{ \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[ \left(-\frac{\Delta p}{kL}\right) \frac{R^2}{2} \right]^{1/n} R \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{(n+1)}{n}} \right] \right\} r dr \quad (4.12)$$

$$Q = 2\pi \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[ \left(-\frac{\Delta p}{kL}\right) \frac{R^2}{2} \right]^{1/n} R \int_0^R r \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{(n+1)}{n}} \right] dr \quad (4.13)$$

Resolvendo a integral da Eq. (4.12), tem-se que:

$$\int_0^R r \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{(n+1)}{n}} \right] dr = \frac{r^2}{2} - \frac{r^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{(n+1)}{n}}}{\frac{(n+1)}{n} + 2} \Big|_0^R = R^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{n}{3n+1} \right) \quad (4.14)$$

Substituindo na Eq. (4.12), tem-se que:

$$Q = 2\pi \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[ \left(-\frac{\Delta p}{kL}\right) \frac{R}{2} \right]^{1/n} R^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{3n+1}\right) \quad (4.15)$$

Substituindo em (4.10), e considerando a definição de área de um círculo, tem-se que:

$$\mathbf{u}_{méd} = 2 \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[ \left(-\frac{\Delta p}{kL}\right) \frac{R}{2} \right]^{1/n} R \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{3n+1}\right) \quad (4.16)$$

A Eq. (4.16) ainda pode ser simplificada como:

$$\mathbf{u}_{méd} = 2 \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{3n+1}\right) \left[ \left(-\frac{\Delta p}{kL}\right) \frac{R}{2} \right]^{1/n} R \quad (4.17)$$

$$\mathbf{u}_{méd} = \left(\frac{n}{n+1} - \frac{2n^2}{(n+1)(3n+1)}\right) \left[ \left(-\frac{\Delta p}{kL}\right) \frac{R}{2} \right]^{1/n} R \quad (4.18)$$

$$\mathbf{u}_{méd} = \left(\frac{n^2+n}{(n+1)(3n+1)}\right) \left[ \left(-\frac{\Delta p}{kL}\right) \frac{R}{2} \right]^{1/n} R \quad (4.19)$$

Que, por fim, resulta em:

$$\mathbf{u}_{méd} = \left(\frac{n}{3n+1}\right) \left[ \left(-\frac{\Delta p}{kL}\right) \frac{R}{2} \right]^{1/n} R \quad (4.20)$$

Além da pressão, também atua no fluido algo denominado fator de atrito. O fator de atrito ( $f$ ) pode ser definido de diferentes maneiras, mas o mais comum é expressá-lo em relação a uma força (SLATTERY, 2005), que aqui chamar-se-á de força de arrasto ( $F_a$ ) a fim de diferenciá-la de outras nomenclaturas. Começar-se-á com o fator de atrito denominado Hagen-Poiseuille, definido como:

$$f \equiv \frac{F_a}{\frac{1}{2}\rho u^2 A} \quad (4.21)$$

Que pela definição na Eq. (2.1), pode ser reescrita como:

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u^2} \quad (4.22)$$

Sendo  $\tau_w$  o tensor de cisalhamento na parede e  $\rho$  a massa específica.

Por (4.2) e (4.22), isolando-se ambos os tensores, chega-se à equação:

$$-\frac{\Delta p}{L} = \frac{2\rho u_{méd}^2}{D} f \quad (4.23)$$

Por (4.20) e (4.22), tem-se que:

$$\mathbf{u}_{méd} = \left(\frac{n}{3n+1}\right) \left[\left(\frac{2\rho u^2}{kD} f\right) \frac{D}{4}\right]^{1/n} \frac{D}{2} \quad (4.24)$$

Elevando-se ambos os lados da expressão à potência  $n$ , tem-se que:

$$\mathbf{u}_{méd}^n = \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \left(\frac{\rho u^2}{2k} f\right) \frac{D^n}{2} \quad (4.25)$$

E reescrevendo a equação para o fator de atrito, tem-se:

$$f = \frac{2^{n+1} \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n k}{\rho u^{2-n} D^n} \quad (4.26)$$

Para o modelo power-law, comumente usa-se um Reynolds próprio para esse modelo, denominado Reynolds power-law, ou por outras nomenclaturas como Metzner-Reed (CHHABRA; RICHARDSON, 2008), ou ainda Dodge-Metzner (FAYED; SHEIKH; ILIEV, 2016), definido como:

$$Re_{PL} = \frac{\rho u^{2-n} D^n}{8^{n-1} \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n k} \quad (4.27)$$

O número de Reynolds é dado pela expressão:

$$f = \frac{\lambda}{Re} \quad (4.28)$$

De fato, decorre que:

$$\lambda = f Re_{PL} \quad (4.29)$$

E, por (4.26) e (4.27), chega-se em:

$$\lambda = \frac{2^{n+1} \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n}{8^{n-1} \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n} = \frac{2^n 2(4n)^n 8}{8^n n^n} = 16 \quad (4.30)$$

Por outro lado, a definição da Eq. (4.21) também pode ser reescrita como o denominado fator de atrito de Darcy, a saber:

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho u^2} \quad (4.31)$$

Por (4.2) e (4.31), isolando-se ambos os tensores, chega-se à equação:

$$-\frac{\Delta p}{L} = \frac{\rho u^2}{2D} f \quad (4.32)$$

Substituindo (4.32) na equação (4.20), tem-se que:

$$\mathbf{u}_{méd} = \left(\frac{n}{3n+1}\right) \left[\left(\frac{\rho u^2}{2kD} f\right) \frac{D}{4}\right]^{1/n} \frac{D}{2} \quad (4.33)$$

De onde coloca-se a equação para o fator de atrito, de forma que:

$$f = \frac{2^{n+3} \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n k}{\rho u^{2-n} D^n} \quad (4.34)$$

Por (4.29), (4.27) e (4.34), chega-se em:

$$\lambda = \frac{2^{n+3}(4n)^n}{8^{n-1}n^n} = \frac{2^3 2^n 2^{2n} 8}{2^{3n}} = 64 \quad (4.35)$$

Com isso, demonstra-se de forma analítica o número de Reynolds para o modelo power-law.

#### 4.2.2 Resolução da minimização da resistência e da razão de aspecto

O modelo matemático utilizado foi o power-law (Eq. (2.5)), com o qual formulou-se o número de Reynolds e foram obtidas as funções de perda de carga. Levando-se em consideração que a busca exaustiva derivada de uma lei generalizada de Hess-Murray é válida para o modelo power-law (MIGUEL, 2016), equiparou-se com o método Design Construtal. Dessa forma, realizou-se a análise geométrica analítica.

As constantes globais geométricas são descritas pelas Eq. (3.4) e (3.5). Há dois graus de liberdade, que descrevem a minimização da resistência do escoamento global. Esses graus de liberdade são definidos pelas razões entre os diâmetros e os comprimentos do ramo principal com os ramos secundários com as Eq. (3.1) e (3.2).

A resistência é dada pela Eq. (3.15) (MIGUEL, 2016) adaptada para o modelo power-law:

$$R_{PL} = \frac{\Delta P}{Q^n} \quad (4.36)$$

sendo  $Q^n$  a vazão volumétrica e  $n$  é o índice de comportamento do fluido. A partir da Eq. (4.13) e substituindo-se o raio pelo diâmetro, tem-se que:

$$Q = 2\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{3n+1}\right) \left(-\frac{D}{4K} \frac{\Delta P}{L}\right)^{1/n} \quad (4.37)$$

$$Q = \frac{2\pi D^3}{8} \left(\frac{n}{2(n+1)} - \frac{n^2}{(n+1)(3n+1)}\right) \left(-\frac{D}{4K} \frac{\Delta P}{L}\right)^{1/n} \quad (4.38)$$

$$Q = \frac{2\pi D^3}{8} \left( \frac{[(3n+1)n] - 2n^2}{2(n+1)(3n+1)} \right) \left( -\frac{D}{4K} \frac{\Delta P}{L} \right)^{1/n} \quad (4.39)$$

$$Q = \frac{2\pi D^3}{8} \left( \frac{1}{2} \frac{n^2+n}{(n+1)(3n+1)} \right) \left( -\frac{D}{4K} \frac{\Delta P}{L} \right)^{1/n} \quad (4.40)$$

$$Q = \frac{\pi D^3}{8} \left( \frac{n}{3n+1} \right) \left( -\frac{D}{4K} \frac{\Delta P}{L} \right)^{1/n} \quad (4.41)$$

$$Q = \frac{\pi D^3}{8} \left( \frac{1}{\frac{3n+1}{n}} \right) \left( -\frac{D}{4K} \frac{\Delta P}{L} \right)^{1/n} \quad (4.42)$$

$$Q = \frac{\pi D^3}{8 \left( \frac{1}{n} + 3 \right)} \left( -\frac{D}{4K} \frac{\Delta P}{L} \right)^{1/n} \quad (4.43)$$

Dessa forma, chega-se à Eq. (4.44) tal como apresentada no apêndice de Miguel (2016).

Por (4.23) e (4.36), tem-se que:

$$R_{PL} = -\frac{2\rho u_{méd}^2 L}{Q^n D} f \quad (4.44)$$

Por (4.20) e Eq. (4.43), tem-se que:

$$R_{PL} = -\frac{\rho L 2^{3n-1} \left( \frac{1}{n} + 3 \right)^{n+2}}{\pi^n D^{3n-1}} \left( -\frac{\Delta P}{L} \frac{D}{4K} \right)^{\frac{2}{n}-1} f \quad (4.45)$$

A Eq. (4.44) coloca a resistência em função do fator de atrito.

Se faz necessário minimizar a resistência total, dada pela equação:

$$R_t = R_1 + \frac{R_2}{2} \quad (4.46)$$

Sendo  $R_1$  o ramo principal e  $R_2$  o ramo secundário.

Por (4.23), (4.24), (4.36) e (4.45), tem-se que:

$$\frac{\Delta P}{Q^n} = - \frac{2^{3n+2} \left(\frac{1}{n}+3\right)^n K}{\pi^n} \frac{L}{D^{3n+1}} \quad (4.47)$$

Assim percebe-se a proporcionalidade entre a resistência e a razão comprimento sobre diâmetro. Substituindo em (4.46), tem-se que:

$$R = \frac{L_1}{D_1^{3n+1}} + \frac{L_2}{2D_2^{3n+1}} \quad (4.48)$$

Para simplificar o desenvolvimento algébrico e considerando que “o volume interno de cada tubo é proporcional à  $D^2L$ ” (BEJAN; ROCHA; LORENTE, 2000), reescreve-se a Eq. (3.4) como:

$$V = D_1^2 L_1 + 2D_2^2 L_2 \quad (4.49)$$

Além disso, a fim de minimizar a resistência total que dependendo da restrição do volume, far-se-á uma otimização geométrica. Para tanto, define-se:

$$x = D_1^2, \quad y = D_2^2 \quad (4.50)$$

Com isso, as Eq. (4.48) e (4.49) são reescritas como:

$$R = \frac{L_1}{x^{\frac{3n+1}{2}}} + \frac{L_2}{2y^{\frac{3n+1}{2}}} \quad (4.51)$$

$$V = L_1 x + 2L_2 y \quad (4.52)$$

Isolando-se a variável  $y$ , tem-se que:

$$y = \frac{V}{2L_2} - \frac{L_1}{2L_2} x \quad (4.53)$$

Definindo  $\frac{V}{2L_2} = a$  e  $\frac{L_1}{2L_2} = b$ , a Eq. (4.53) se torna  $y = a - bx$ . Reescreve-se, portanto, a Eq. (4.51) como:

$$R = \frac{L_1}{x^{\frac{3n+1}{2}}} + \frac{L_2}{2(a-bx)^{\frac{3n+1}{2}}} \quad (4.54)$$

Por  $\frac{dR}{dx} = 0$  tem-se a resistência mínima, então:

$$\frac{-3n-1}{2} L_1 x^{\left(\frac{-3n-3}{2}\right)} = \frac{b}{2} \left(\frac{3n+1}{2}\right) L_2 (a - bx)^{\left(\frac{-3n-3}{2}\right)} \quad (4.55)$$

Deseja-se saber a razão entre os diâmetros, ou seja,  $\frac{y}{x}$ . Pela definição  $b = \frac{L_1}{2L_2}$  e sabendo que  $y = a - bx$ , tem-se que:

$$\frac{y}{x} = 2^{-2/\left(\frac{3n+3}{2}\right)} \quad (4.56)$$

E portanto chega-se ao DR ótima:

$$\frac{D_2}{D_1} = 2^{-1/\left(\frac{3n+3}{2}\right)} \quad (4.57)$$

Disso decorre que:

$$R_{min} = \frac{1}{x^2} \left( L_1 + 2^{\frac{4}{\alpha}-1} L_2 \right), \text{ com } \alpha = \frac{3n+3}{2} \quad (4.58)$$

$$V = x \left( L_1 + 2^{1-\frac{2}{\alpha}} L_2 \right), \text{ com } \alpha = \frac{3n+3}{2} \quad (4.59)$$

Para eliminar a variável x, tem-se:

$$R_{min}V^2 = \left(L_1 + 2^{\frac{4}{\alpha}-1}L_2\right)\left(L_1 + 2^{1-\frac{2}{\alpha}}L_2\right)^2, \text{ com } \alpha = \frac{3n+3}{2} \quad (4.60)$$

Pela Eq. (4.48) e a razão (4.57), tem-se que:

$$R = \frac{L_1}{D_1^{3n+1}} + \frac{L_2}{2\left(2^{-\frac{1}{\alpha}}D_1\right)^{3n+1}}, \text{ com } \alpha = \frac{3n+3}{2} \quad (4.61)$$

Resolvendo, chega-se à:

$$R = \frac{L_1}{D_1^{3n+1}} + \frac{L_2}{2^{1-\frac{2(3n+1)}{3n+3}}D_1^{3n+1}} \quad (4.62)$$

Fazendo  $\frac{dR}{dx} = 0$ , tem-se a razão LR ótima:

$$\frac{L_2}{L_1} = 2^{1-\frac{2(3n+1)}{3n+3}} \quad (4.63)$$

### 4.3 MODELO DE CARREAU

De princípio, o cálculo da minimização da resistência ao escoamento de fluido com o modelo de Carreau indicava a necessidade do uso de cinco variáveis, a saber:  $\phi$ , Reynolds,  $\eta^*$ ,  $\tilde{\lambda}$  e  $n$ . No entanto, percebeu-se que as variáveis  $\phi$  e Reynolds não alteravam os resultados. Dessa forma, o planejamento fatorial  $2^3$  tornou-se mais apropriado para esse modelo.

Os máximos e mínimos utilizados para as variáveis  $\eta^*$ ,  $\tilde{\lambda}$  e  $n$  estão descritos na tabela 3, além dos resultados de DR e LR ótimas.

Tabela 3 - Valores obtidos com modelo de Carreau

$\eta^*$	$\tilde{\lambda}$	n	DR	LR
10	5	0,2	0,7837	0,6772
10	5	0,8	0,791	0,6682
10	495	0,2	0,8426	0,638
10	495	0,8	0,8048	0,6593
1190	5	0,2	0,4474	1
1190	5	0,8	0,7757	0,6794
1190	495	0,2	0,7073	0,7537
1190	495	0,8	0,7759	0,6788

Fonte: Elaborado pelo autor.

Seguindo a metodologia proposta, uma matriz X foi elaborada com os valores máximos e mínimos das variáveis utilizadas, os quais foram reescritos como 1 e -1. Além disso, as variáveis  $\eta^*$ ,  $\tilde{\lambda}$  e n foram reescritas como 1, 2 e 3, respectivamente, a fim de facilitar a construção das demais colunas (que correspondem às partes restantes do conjunto). Consequentemente, foram criadas as outras colunas com as demais partes do conjunto. A matriz X foi organizada de acordo com a tabela 4.

Tabela 4 - Matriz X (para o cálculo dos efeitos com o modelo carreau)

Média	1	2	3	12	13	23	123
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme dito anteriormente, para o cálculo dos efeitos, as colunas DR e LR ótimas da tabela 3 foram consideradas como dois vetores y. Dessa forma, aplicando a Eq.(3.1), foi obtido o vetor coluna para LR ótima conforme os valores da tabela 5 e o vetor coluna para DR ótima conforme a tabela 6.

Tabela 5 - Vetor y com valores de LR ótima

<b>LR ótima</b>	Vetor Efeitos
Média	0,719325
1	0,1173
2	-0,07375
3	-0,0958
12	-0,0497
13	-0,10195
23	0,069
123	0,05385

Fonte: Elaborado pelo autor.

E para DR ótima:

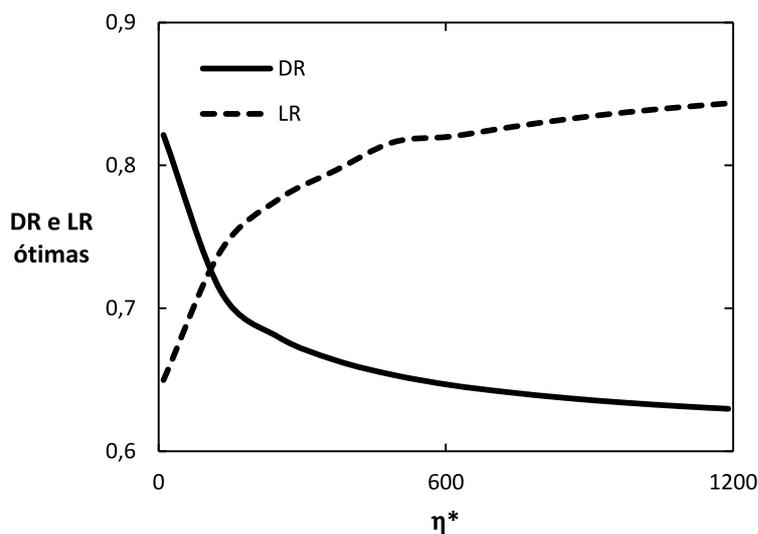
Tabela 6 - Vetor y com valores de DR ótima

<b>DR ótima</b>	Vetor Efeitos
Média	0,74105
1	-0,12895
2	0,0832
3	0,0916
12	0,04685
13	0,10685
23	-0,0762
123	-0,05365

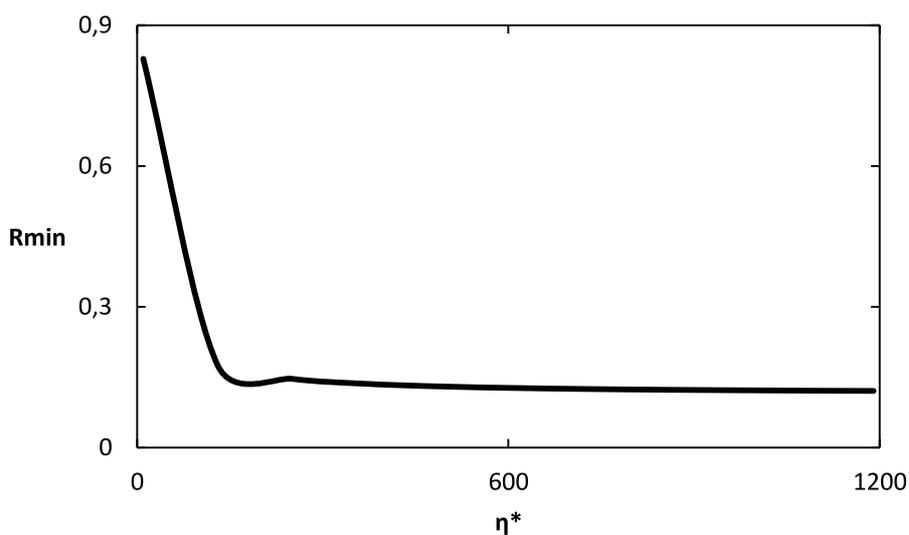
Fonte: Elaborado pelo autor.

Em ambos os vetores dos efeitos, percebe que das três variáveis em questão, a que mais influencia é  $\eta^*$ .

Pelas Fig. 5, 6 e 7 observa-se em (a) o efeito dos parâmetros  $\eta^*$ ,  $\tilde{\lambda}$  e  $n$  nas razões DR e LR ótimas obtidas e em (b) suas respectivas resistências.

Figura 5 - Efeito do parâmetro  $\eta^*$ 

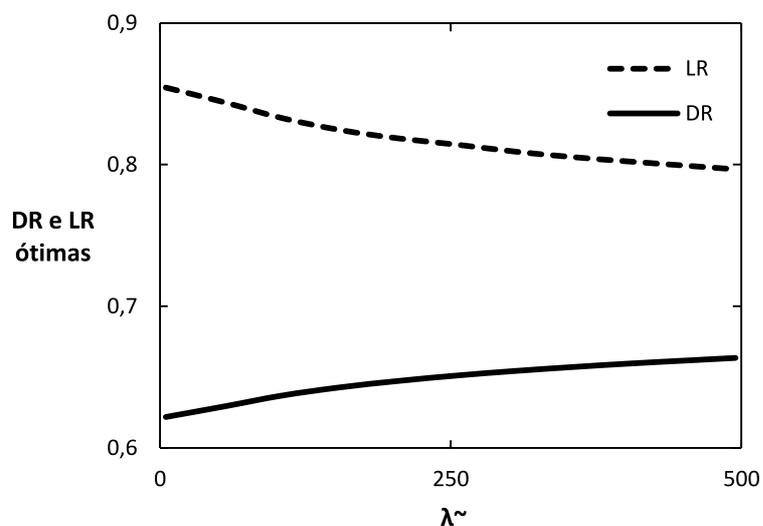
(a)



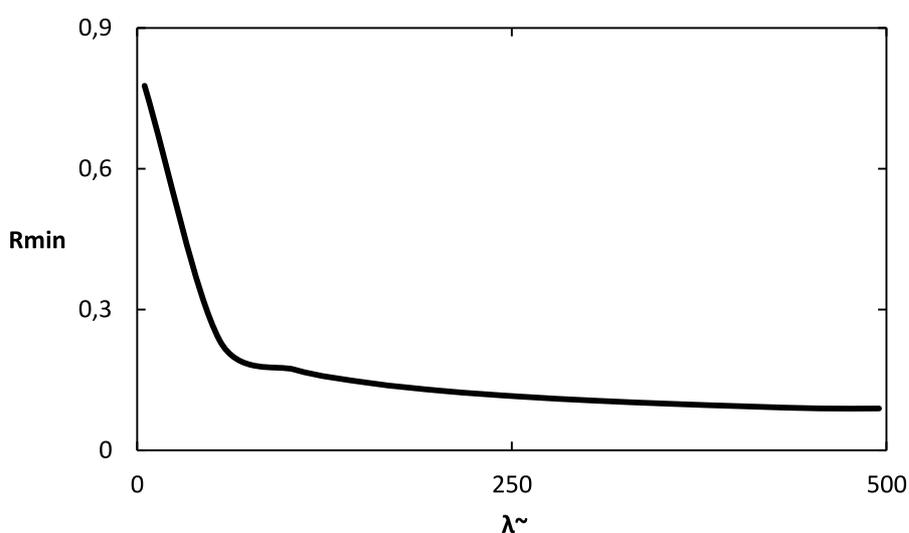
(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando-se o valor ótimo de Hess-Murray (0,793...) para DR ótima, observa-se na Fig. 5 que o efeito do parâmetro  $\eta^*$  possui a razão de diâmetros ótima se mantém abaixo desse valor. Observa-se também que, ambos DR quanto LR ótimas possuem um comportamento exponencial e aparentemente simétrico. DR se comporta de forma decrescente e tendendo a um valor abaixo do ótimo de Hess-Murray, enquanto que LR de forma crescente e tendendo a um valor acima. A resistência decresce rapidamente para os valores iniciais de  $\eta^*$ , e após torna-se aparentemente constante.

Figura 6 - Efeito do parâmetro  $\tilde{\lambda}$ 

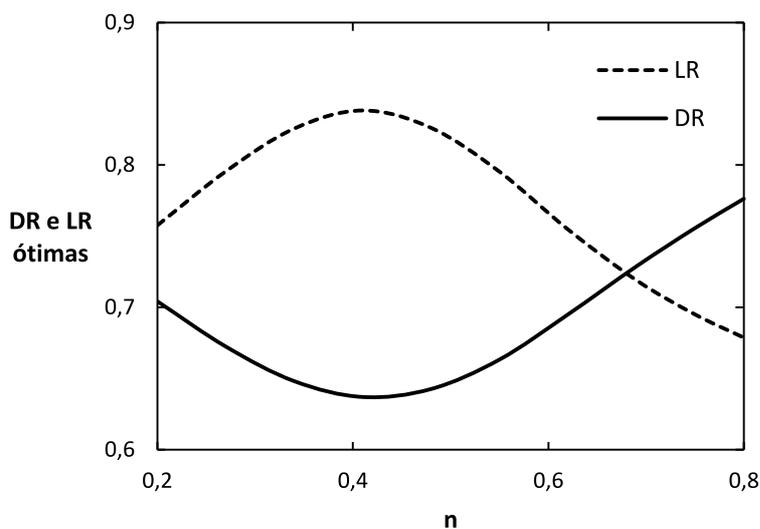
(a)



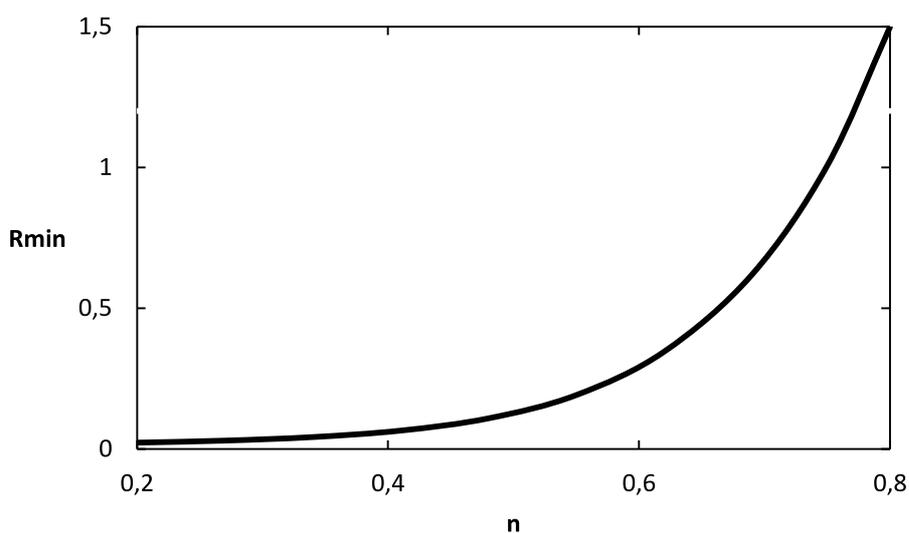
(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Fig. 6, observa-se que o efeito do parâmetro  $\tilde{\lambda}$  também possui um comportamento simétrico entre DR e LR ótimas. No entanto, ao contrário dos demais efeitos, LR tende a um valor aproximado ao valor ótimo de Hess-Murray, ao passo que DR tende a um valor abaixo. Também percebe-se que DR comporta-se de forma crescente enquanto que LR de forma decrescente, ambos de forma exponencial. Semelhante ao parâmetro  $\eta^*$ , a resistência de  $\tilde{\lambda}$  decresce significativamente para os valores iniciais, e após comporta-se decrescendo lentamente.

Figura 7 - Efeito do parâmetro  $n$ 

(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

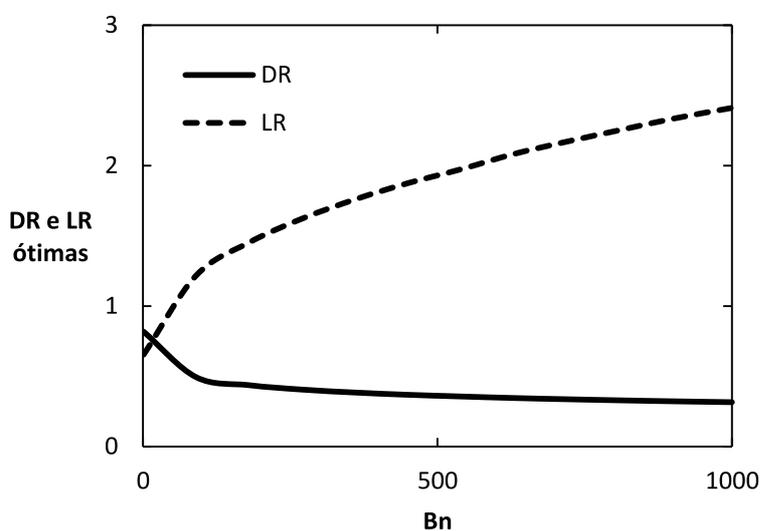
No efeito do parâmetro  $n$  (Fig. 7), observa-se que a razão de diâmetros ótima se mantém abaixo do valor ótimo de Hess-Murray, e assim como os efeitos anteriores, também possui um comportamento simétrico entre DR e LR ótimas. Observa-se ainda que, para baixos valores de  $n$ , a razão de comprimentos ótima aumenta conforme  $n$  aumenta, e a razão de diâmetros diminui. Para um valor limite de  $n$ , o comportamento se inverte. Isso pode ser devido ao fato de que os fluidos com baixos valores de  $n$  apresentam um afinamento muito intenso, então experimentam pouca perda de carga em tubos estreitos. A resistência de  $n$

apresenta um comportamento diferente dos parâmetros  $\eta^*$  e  $\tilde{\lambda}$ , tendo um crescimento exponencial.

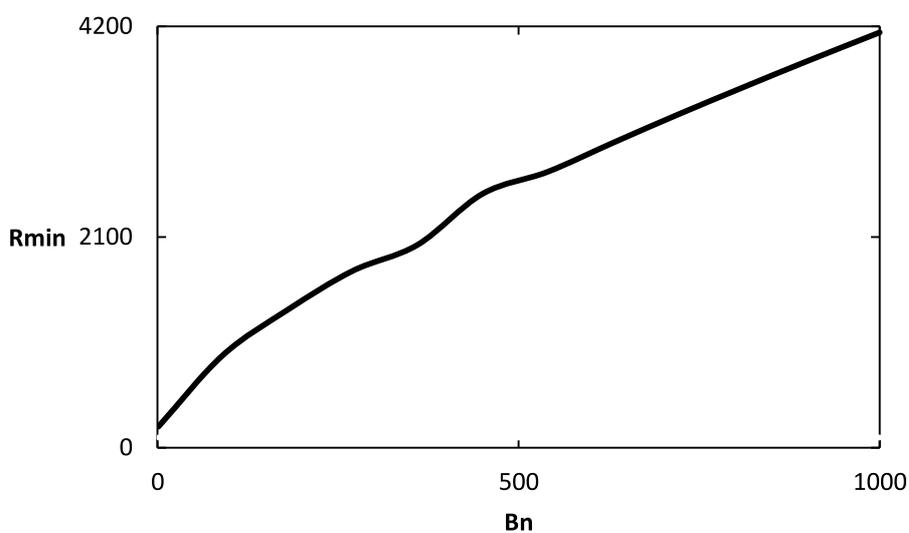
#### 4.4 MODELO BINGHAM

Assim como os modelos newtoniano e carreau, no modelo bingham não há variações dos resultados para o uso de diferentes intervalos com as variáveis  $\phi$  e reynolds. Devido a isso, não houve a necessidade de um planejamento fatorial, pois a única variável em questão foi Bn (número de bingham).

Figura 8 - Efeito do parâmetro Bn



(a)

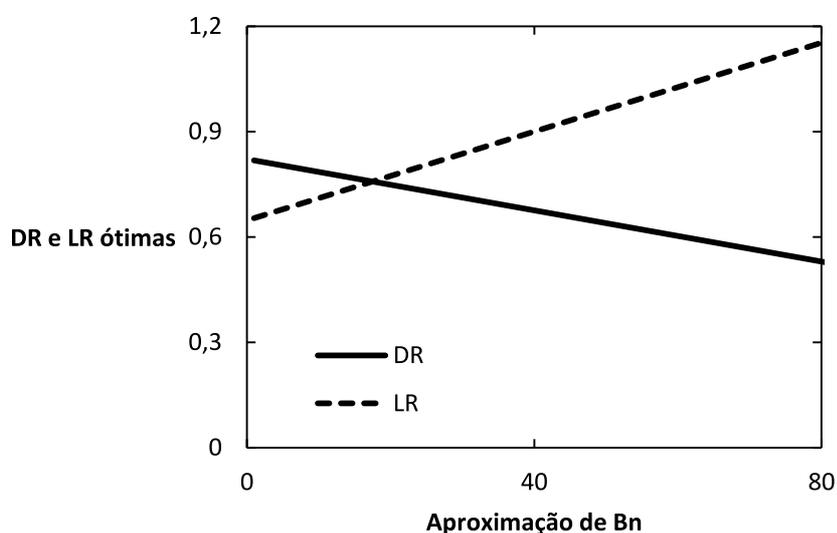


(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Fig. 8 compara graficamente os resultados obtidos para DR e LR ótimas em função de Bn. Nela, percebe-se que o efeito do parâmetro Bn (número de Bingham) apresenta um comportamento um pouco diferente dos parâmetros do modelo de Carreau. À primeira vista, DR e LR ótimas não são simétricas, embora ambos possuem com comportamento exponencial, sendo LR crescente e DR decrescente. A resistência possui um comportamento próximo ao linear, distinguindo-se dos comportamentos apresentados pelas resistências dos parâmetros do modelo de Carreau.

Figura 9 - Aproximação do efeito do parâmetro Bn



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Fig. 9, que é uma aproximação da Fig. 8, observa-se ainda que, DR e LR ótimas igualam-se em um valor próximo ao valor ótimo de Hess-Murray.

## 5 CONCLUSÕES

O presente trabalho abordou soluções analíticas e aproximadas como ferramentas para o Design Construtal de bifurcações de tubos. Com esta abordagem simples e rápida, comparado a métodos de simulação de fluidodinâmica computacional, pretendeu-se avaliar o efeito dos parâmetros reológicos dos modelos power-law, de Carreau e de Bingham nos projetos de melhor desempenho conforme o método Design Construtal.

Foram consideradas as soluções para a perda de carga em trechos de tubos submetidos a escoamentos plenamente desenvolvidos. Para o modelo de fluido pseudoplástico power-law, há uma solução analítica disponível, enquanto que, para o modelo pseudoplástico de Carreau e para o modelo viscoplástico de Bingham, não estão disponíveis soluções analíticas. Estes fluidos apresentam comportamento altamente não linear, e as equações que os descrevem não permitem a obtenção de solução analítica. Assim, foram utilizadas soluções aproximadas, propostas por Alves, Coelho e Cruz (2012), para a perda de carga de fluidos não newtonianos em tubulações.

Utilizou-se o método Design Construtal para modelar uma bifurcação de tubos em forma de T, para a qual se manteve fixa a razão entre o volume de tubos e o volume total do sistema. O parâmetro de desempenho do sistema foi considerado a resistência ao escoamento, e buscou-se as razões ótimas entre os diâmetros, DR, e os comprimentos, LR dos tubos principal e secundários, ou seja, as razões DR e LR que minimizassem a resistência ao escoamento.

Para o fluido power-law, o modelo analítico disponível, que propõe um formato específico para o número de Reynolds, permitiu que fossem encontradas a perda de carga e as razões ótimas LR e DR, para as quais resgatou-se a razão clássica de Hess-Murray.

O modelo de fluido de Carreau representa um fluido pseudoplástico que reduz sua viscosidade entre dois patamares definidos. Para este fluido, que é modelado por três parâmetros reológicos, realizou-se um planejamento fatorial a fim de determinar quais parâmetros reológicos teriam maior efeito nos resultados do Design Construtal. Concluiu-se que a razão de viscosidades é o parâmetro que tem maior efeito sobre o resultado do Design Construtal. Assim, a variação do parâmetro razão de viscosidades pode alterar de 0,8214 para 0,6298 o resultado da razão de

diâmetros ótima e de 0,6499 para 0,8435 a razão de comprimentos ótima. Isto corrobora os resultados da literatura que afirmam que os melhores designs para fluidos newtonianos nem sempre são os melhores designs para fluidos não newtonianos.

No caso do fluido de Bingham, observou-se que com a solução aproximada de Alves, Coelho e Cruz (2012) se chega a razões ótimas muito próximas àquelas previstas por Hess e Murray.

Este estudo abre portas para o uso de métodos aproximados para a obtenção de Designs Construtais para fluidos não newtonianos de forma muito ágil. O trabalho de Alves, Coelho e Cruz (2012) ainda apresenta soluções aproximadas para a perda de carga para outros modelos de fluidos, como Herschel-Bulkley e Casson. Assim, os projetos construtais para fluidos não newtonianos podem se utilizar destas soluções para prover designs otimizados específicos, que é de grande interesse para indústrias de alimentos, cosméticos, petróleo, polímeros, etc.

## REFERÊNCIAS

- BARNES, H. A. **A handbook of elementary rheology**. Aberystwith: University of Wales, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2000.
- BATCHELOR, G. K. **An Introduction to Fluid Dynamics**. 11th. ed. New York: Cambridge Mathematical Library, 2009.
- BEJAN, A.; ROCHA, L. A. O.; LORENTE, S. Thermodynamic optimization of geometry: T- and Y-shaped constructs of fluid streams. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 39, n. 9–11, p. 949–960, 2000.
- BEJAN, A.; ZANE, J. P. **Design in Nature: How the Constructal Law Governs Evolution in Biology, Physics, Technology, and Social Organizations**. New York: Anchor, 2013.
- ÇENGEL, Y. A.; BOLES, M. A. **Termodinâmica**. 7<sup>a</sup> ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.
- ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos Fluidos: fundamentos e aplicações**. 3a. ed. Porto Alegre: Amgh, 2015.
- CHAN, W. Y.; DING, Y.; TU, J. Y. Modeling of non-Newtonian blood flow through a stenosed artery incorporating fluid-structure interaction. **ANZIAM Journal**, v. 47, p. 507, 2016.
- CHHABRA, R. P. Non-Newtonian fluids: An introduction. **Rheology of Complex Fluids**, p. 3–34, 2010. Documento em PDF.
- CHHABRA, R. P.; RICHARDSON, J. F. **Non-Newtonian Flow and Applied Rheology**. 2nd. ed. [s.l.] Butterworth-Heinemann, 2008.
- CRUZ, D. A.; COELHO, P. M.; ALVES, M. A. A Simplified Method for Calculating Heat Transfer Coefficients and Friction Factors in Laminar Pipe Flow of Non-Newtonian Fluids. p. 9–14, 2012.
- DE SOUZA MENDES, P. R. Dimensionless non-Newtonian fluid mechanics. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 147, n. 1–2, p. 109–116, 2007.
- DOUDEL, E. et al. Experimental and numerical methodology to analyze flows in a coronary bifurcation. **European Journal of Mechanics, B/Fluids**, v. 67, p. 341–356, 2018.
- DOS SANTOS, E. D.; ISOLDI, L. A. ; GOMES, M. N. ; ROCHA, L. A. O. . The Constructal Design Applied to Renewable Energy Systems. In: Eduardo Rincón-Mejía; Alejandro de las Heras. (Org.). Sustainable Energy Technologies. 1ed. Boca Raton: CRC Press - Taylor & Francis Group, 2017, v. 1, p. 63-87.
- FAYED, H. E.; SHEIKH, N. A.; ILIEV, O. On Laminar Flow of Non-Newtonian Fluids in Porous Media. **Transport in Porous Media**, v. 111, n. 1, p. 253–264, 2016.

FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; MCDONALD, A. T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 7a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

GHAEDAMINI, H.; SALIMPOUR, M. R.; MUJUMDAR, A. S. The effect of sveltiness on the bifurcation angles role in pressure drop and flow uniformity of tree-shaped microchannels. **Applied Thermal Engineering**, v. 31, n. 5, p. 708–716, 2011.

HALDENWANG, R.; HOLM, R. Sludge pipe flow pressure drop prediction using composite power-law friction factor – Reynolds number correlations based on different non-Newtonian Reynolds numbers. v. 38, n. 4, p. 615–622, 2012.

HUO, Y.; KASSAB, G. S. Scaling laws of coronary circulation in health and disease. **Journal of Biomechanics**, v. 49, n. 12, p. 2531–2539, 2016.

JOSEPH, D. D.; YANG, B. H. Friction factor correlations for laminar, transition and turbulent flow in smooth pipes. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 239, n. 14, p. 1318–1328, 2010.

KARIMI, S. et al. Effect of rheological models on the hemodynamics within human aorta: CFD study on CT image-based geometry. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 207, p. 42–52, 2014.

LI, Y. et al. Laminar thermal performance of microchannel heat sinks with constructal vertical Y-shaped bifurcation plates. **Applied Thermal Engineering**, v. 73, n. 1, p. 185–195, 2014.

LIU, H.; LI, P. Even distribution/dividing of single-phase fluids by symmetric bifurcation of flow channels. **International Journal of Heat and Fluid Flow**, v. 40, p. 165–179, 2013.

MARSDEN, A. L. Optimization in Cardiovascular Modeling. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 46, n. 1, p. 519–546, 2013.

METZNER, A. B.; REED, J. C. Flow of Non-Newtonian Fluids—Correlation of the Laminar, Transition and Turbulent-Flow Regions. **AIChE J.**, 1(4), p. 434–440, 1955.

MIGUEL, A. F. Toward an optimal design principle in symmetric and asymmetric tree flow networks. **Journal of Theoretical Biology**, v. 389, p. 101–109, 2016.

MIGUEL, A. F.; ROCHA, L. A. O. **Tree-shaped fluid flow and heat transfer**. [s.l.] Springer, 2018.

MOUSSA, I. et al. Which diameter and angle rule provides optimal flow patterns in a coronary bifurcation? **Journal of Biomechanics**, v. 45, n. 7, p. 1273–1279, 2012.

NAKANISHI, H.; NAGAIHIRO, S. I.; MITARAI, N. Fluid dynamics of dilatant fluids. **Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**, v. 85, n. 1, p. 1–11, 2012.

NETO, B. DE B.; SCARMINIO, I. S.; BRUNS, R. E. **Como Fazer Experimentos Pesquisa e desenvolvimento na ciência e na indústria**. 2a. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2001.

PEPE, V. DA R. **Otimização numérica do escoamento interno de estruturas em forma de T aplicando o método Design Construtal**. [s.l.] UFRGS, 2018. Documento em PDF.

PONALAGUSAMY, R. Mathematical analysis on effect of non-Newtonian behavior of blood on optimal geometry of microvascular bifurcation system. **Journal of the Franklin Institute**, v. 349, n. 9, p. 2861–2874, 2012.

ROCHA, L. A. O.; LORENTE, S.; BEJAN, A. Constructal Theory in Heat Transfer. In: KULACKI F. **Handbook of Thermal Science and Engineering**. Springer, 2017. Chap. 1, p. 1-32.

SAMADIANFARD, S. Gene expression programming analysis of implicit Colebrook-White equation in turbulent flow friction factor calculation. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 92–93, p. 48–55, 2012.

SAYED, M.; SHIRANI, E. Development of a general method for designing microvascular networks using distribution of wall shear stress. **Journal of Biomechanics**, v. 46, n. 13, p. 2303–2309, 2013.

SEHN, A. **Estudo numérico e Design Construtal de escoamentos laminares bifurcados em forma de Y**. Porto Alegre: UFRGS, 2018. Documento em PDF.

SLATTERY, J. C. **Advanced Transport Phenomena**. 3rd. ed. New York: Cambridge University Press, 2005.

THOMA, R. Über den Verzweigungsmodus der Arterien. **Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen**, v. 12, n. 3, p. 352–413, 1901.

## ANEXO A – ALGORITMO EES PARA O MODELO NEWTONIANO

$$\text{Resistencia}=\text{DELTA\_p}/\text{m\_dot}$$

$$\text{DELTA\_p}=\text{DELTA\_p\_0}+\text{DELTA\_p\_1}$$

$$\text{DELTA\_p\_0}=\text{L\_0}*\text{f\_0}/\text{D\_0}*\text{rho}*\text{Vel\_0}^2/2$$

$$\text{DELTA\_p\_1}=\text{L\_1}*\text{f\_1}/\text{D\_1}*\text{rho}*\text{Vel\_1}^2/2$$

$$\text{Vel\_1}=\text{Vel\_0}*\text{D\_0}^2/\text{D\_1}^2$$

$$\text{Re\_0}=\text{rho}*\text{Vel\_0}*\text{D\_0}/\text{mu}$$

$$\text{Re\_1}=\text{rho}*\text{Vel\_1}*\text{D\_1}/\text{mu}$$

$$\text{f\_0}=64/\text{Re\_0}$$

$$\text{f\_1}=64/\text{Re\_1}$$

$$\text{m\_dot}=\text{rho}*\text{Vel\_0}*\text{PI}*\text{D\_0}^2/4$$

"modelagem da geometria"

$$\text{V\_D}=\text{PI}/4*(\text{D\_0}^2*\text{L\_0}+2*\text{D\_1}^2*\text{L\_1})$$

$$\text{V\_T}=2*\text{L\_0}*\text{L\_1}*\text{D\_0}$$

$$\text{D\_R}=\text{D\_1}/\text{D\_0}$$

$$\text{L\_R}=\text{L\_1}/\text{L\_0}$$

$$\text{fi}=\text{V\_D}/\text{V\_T}$$

"parâmetros do fluido constantes, ou seja, a velocidade é calculada a partir do Reynolds definido pelo usuário"

$$\text{rho}=1060$$

$$\text{mu}=3,45\text{e-}3$$

"parâmetros definidos pelo usuário"

$$\text{V\_T}=1$$

$$\text{Re\_0}=200$$

$$\text{fi}=0,1$$

"parâmetros de projeto, graus de liberdade"

$$\text{D\_R}=0,8$$

$$\text{L\_R}=0,8$$

{\\$PX\\$96} {\$ST\$ON}

## ANEXO B – ALGORITMO EES PARA O MODELO DE CARREAU

Resistencia=DELTA\_p/m\_dot\_0

DELTA\_p=DELTA\_p\_0+DELTA\_p\_1

"modelagem da geometria"

$V_D = \pi/4 * (D_0^2 * L_0 + 2 * D_1^2 * L_1)$

$V_T = 2 * L_0 * L_1 * D_0$

$D_R = D_1 / D_0$

$L_R = L_1 / L_0$

$f_i = V_D / V_T$

$V_T = 1$

"modelagem do escoamento"

$Vel_1 = Vel_0 * D_0^2 / D_1^2$

$m_{dot}_0 = \rho * Vel_0 * \pi * D_0^2 / 4$

"Definição do Reynolds e gamma\_dot de referência"

$\gamma_{dot}_0 = 8 * Vel_0 / D_0$

$\gamma_{dot}_1 = 8 * Vel_1 / D_1$

$Re_0 = \rho * Vel_0 * D_0 / \eta_{ref}$

$Re_1 = \rho * Vel_1 * D_1 / \eta_{ref}$

"Parâmetros do fluido"

"Carreau"

$\rho = 1000$

$\eta_{zero} = 1$

"eta\_infinity=0,01"

$a = 2$

"lambda=100"

$\lambda_{til} = \lambda * 4 * m_{dot}_0 / \rho / \pi / D_0^3$

$\eta_{star} = \eta_{zero} / \eta_{infinity}$

$\eta_{ref} = \eta_{zero}$

"equação geral"

$DELTA_{p_0} / L_0 = 4 / D_0 * ((3 * n_{prime_0} + 1) / (4 * n_{prime_0}))^{n_{prime_0}} * (8 * Vel_0 / D_0)^{a_0} * \eta_{star}$

$DELTA_{p_1} / L_1 = 4 / D_1 * ((3 * n_{prime_1} + 1) / (4 * n_{prime_1}))^{n_{prime_1}} * (8 * Vel_1 / D_1)^{a_1} * \eta_{star}$

"modelos de viscosidade"

"Carreau"

$\eta_0 = \eta_{infinity} + (\eta_{zero} - \eta_{infinity}) * (1 + (\lambda * \gamma_{dot}_0)^a)^{-(n-1)/a}$

$\eta_1 = \eta_{infinity} + (\eta_{zero} - \eta_{infinity}) * (1 + (\lambda * \gamma_{dot}_1)^a)^{-(n-1)/a}$

"n\_prime"

"Carreau"

$$n\_prime\_0 = 1 + ((\eta_0 - \eta_{\infty}) * (n-1) * (1 + (\lambda * \gamma_{dot\_0})^{**a})^{**((n-1-a)/a)} * (\lambda * \gamma_{dot\_0})^{**a}) / (\eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty}) * (1 + (\lambda * \gamma_{dot\_0})^{**a})^{**((n-1)/a)})$$

$$n\_prime\_1 = 1 + ((\eta_0 - \eta_{\infty}) * (n-1) * (1 + (\lambda * \gamma_{dot\_1})^{**a})^{**((n-1-a)/a)} * (\lambda * \gamma_{dot\_1})^{**a}) / (\eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty}) * (1 + (\lambda * \gamma_{dot\_1})^{**a})^{**((n-1)/a)})$$

"parâmetros definidos pelo usuário"

fi=0,1  
 Re\_0=200  
 eta\_star=300  
 lambda\_til=50  
 n=0,5

"parâmetros de projeto, graus de liberdade"

"D\_R=0,8  
 L\_R=0,8" {\$PX\$96} {\$ST\$ON}

## ANEXO C - ALGORITMO EES PARA O MODELO DE BINGHAM

$$\text{Resistencia} = \Delta p / m_{\text{dot}_0}$$

$$\Delta p = \Delta p_0 + \Delta p_1$$

### "modelagem da geometria"

$$V_D = \pi/4 * (D_0^2 * L_0 + 2 * D_1^2 * L_1)$$

$$V_T = 2 * L_0 * L_1 * D_0$$

$$D_R = D_1 / D_0$$

$$L_R = L_1 / L_0$$

$$f_i = V_D / V_T$$

$$V_T = 1$$

### "modelagem do escoamento"

$$Vel_1 = Vel_0 * D_0^2 / D_1^2$$

$$m_{\text{dot}_0} = \rho * Vel_0 * \pi * D_0^2 / 4$$

### "Definição do Reynolds e $\gamma_{\text{dot}}$ de referência"

$$\gamma_{\text{dot}_0} = 8 * Vel_0 / D_0$$

$$\gamma_{\text{dot}_1} = 8 * Vel_1 / D_1$$

$$Re_0 = \rho * Vel_0 * D_0 / \eta_{\text{ref}}$$

$$Re_1 = \rho * Vel_1 * D_1 / \eta_{\text{ref}}$$

### "Parâmetros do fluido"

#### "Bingham"

$$\rho = 1000$$

$$\eta_{\text{infinity}} = 1$$

$$\tau_{\text{zero}} = Bn * \eta_{\text{ref}} * Vel_0 / D_0$$

$$\eta_{\text{ref}} = \eta_{\text{infinity}}$$

### "equação geral"

$$\Delta p_0 / L_0 = 4 / D_0 * ((3 * n_{\text{prime}_0} + 1) / (4 * n_{\text{prime}_0}))^{n_{\text{prime}_0}} * (8 * Vel_0 / D_0)^{n_{\text{prime}_0}} * \eta_{\text{ref}}$$

$$\Delta p_1 / L_1 = 4 / D_1 * ((3 * n_{\text{prime}_1} + 1) / (4 * n_{\text{prime}_1}))^{n_{\text{prime}_1}} * (8 * Vel_1 / D_1)^{n_{\text{prime}_1}} * \eta_{\text{ref}}$$

### "modelos de viscosidade"

#### "Bingham"

$$\eta_0 = \eta_{\text{infinity}} + \tau_{\text{zero}} / \gamma_{\text{dot}_0}$$

$$\eta_1 = \eta_{\text{infinity}} + \tau_{\text{zero}} / \gamma_{\text{dot}_1}$$

### " $n_{\text{prime}}$ "

#### "Bingham"

$$n_{\text{prime}_0} = 1 - \tau_{\text{zero}} / (\eta_{\text{infinity}} * \gamma_{\text{dot}_0} + \tau_{\text{zero}})$$

$$n_{\text{prime}_1} = 1 - \tau_{\text{zero}} / ((\eta_{\text{infinity}} * \gamma_{\text{dot}_1}) + \tau_{\text{zero}})$$

"parâmetros definidos pelo usuário"

$f_i=0,1$

$Re_0=200$

$Bn=10$

"parâmetros de projeto, graus de liberdade"

" $D_R=0,8$

$L_R=0,8$ "  $\{\$PX\$96\} \{\$ST\$ON\}$